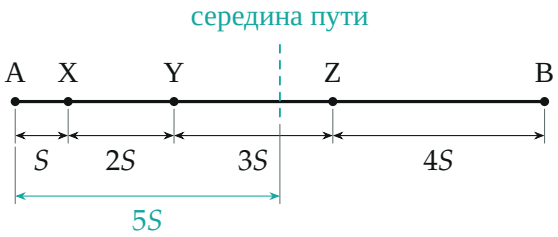
Автомобиль между деревнями

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 7 класс, задача 5] На пути из города A в город B есть три деревни X, Y и Z. Известно, что расстояния между населенными пунктами относятся как: AX:XY:YZ:ZB=1:2:3:4. Автомобиль проехал из A в B так, что его скорости на участках AX, XY, YZ и ZB были постоянными, а времена прохождения участков относились как $t_{AX} : t_{XY} : t_{YZ} : t_{ZB} = 4 : 3 : 2 : 1$. Найти среднюю скорость на первой половине пути, если его скорость на участке ZB равнялась v.



Поясняющий рисунок: участки дороги в масштабе 1 : 2 : 3 : 4*; середина пути лежит внутри участка YZ*

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль едет четыре участка с разными постоянными скоростями. Средняя скорость на первой половине пути — это весь путь первой половины, делённый на всё время, потраченное на него. Главная идея: середина пути попадает внутрь участка YZ, поэтому время на кусок YZ, входящий в первую половину, надо найти отдельно — скорость на YZ постоянна, и время пропорционально пройденной части. Класс задачи — средняя скорость при кусочно-равномерном движении.

Обозначения. S — длина участка AX, t — время на участке ZB (минимум букв: всё выражаем через них). Тогда

$$XY = 2S, \quad YZ = 3S, \quad ZB = 4S;$$

$$t_{AX} = 4t, \quad t_{XY} = 3t, \quad t_{YZ} = 2t, \quad t_{ZB} = t.$$

1. Скорость на ZB через S и t. На ZB движение равномерное: $v = \dfrac{4S}{t}$. Это связь, которая позже уберёт S и t из ответа.

2. Где середина пути. Весь путь $S + 2S + 3S + 4S = 10S$, половина — $5S$. Участки AX и XY вместе дают $3S$, а с YZ — уже $6S$. Значит, середина лежит на YZ: первая половина пути — это AX, XY и ещё $5S - 3S = 2S$ участка YZ, то есть $\frac{2}{3}$ его длины.

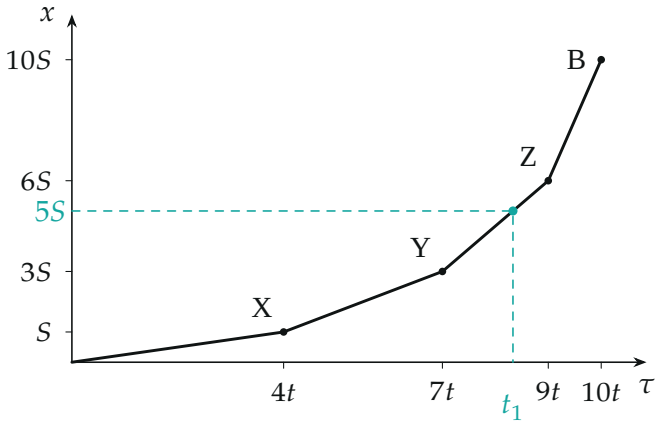


График координаты x от времени τ: ломаная из четырёх отрезков, наклон каждого — скорость на участке. Середину пути $x = 5S$ автомобиль проходит в момент t_1

3. Время на первую половину. На YZ скорость постоянна, поэтому время прохождения части участка пропорционально её длине: $\frac{2}{3}$ участка — за $\frac{2}{3} \cdot 2t$. Время первой половины пути

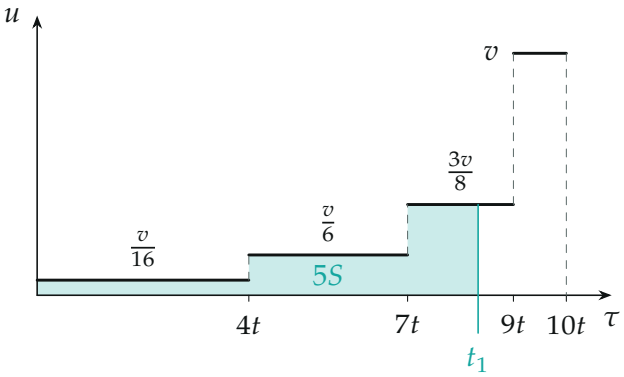
$$t_1 = t_{AX} + t_{XY} + \frac{2}{3}\,t_{YZ} = 4t + 3t + \frac{4}{3}\,t = \frac{25}{3}\,t.$$

4. Средняя скорость. По определению средняя скорость — весь путь на всё время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{5S}{t_1} = \frac{5S}{\frac{25}{3}t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{S}{t}.$$

Из пункта 1 $\frac{S}{t} = \frac{v}{4}$, поэтому

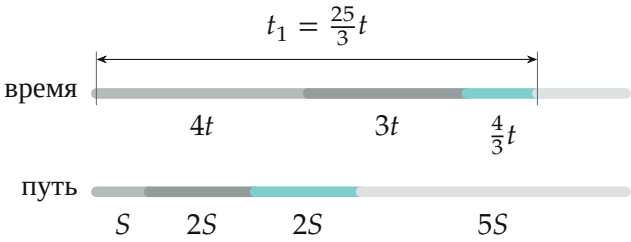
$$v_{\text{ср}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{v}{4} = \frac{3}{20} v.$$



Скорость и от времени: четыре ступеньки. Площадь под графиком — путь; закрашенная площадь до момента t_1 равна половине пути $5S$

Скорости на участках (для рисунка): $u_{AX} = \frac{S}{4t} = \frac{v}{16}$, $u_{XY} = \frac{2S}{3t} = \frac{v}{6}$, $u_{YZ} = \frac{3S}{2t} = \frac{3v}{8}$, $u_{ZB} = v$.

Обратите внимание: среднюю скорость нельзя искать как среднее арифметическое скоростей на участках. Первые два участка автомобиль едет медленно и долго, поэтому средняя скорость на первой половине ближе к малым скоростям.



Первая половина пути (цветная часть нижней полосы) занимает $\frac{25}{3}t$ из $10t$ всего времени: AX, XY и $\frac{2}{3}$ участка YZ (бирюзовый кусок)

Проверка. Размерность: $v_{\text{ср}}$ выражена через v — скорость. Второй способ: средняя скорость на всём пути $\frac{10S}{10t} = \frac{S}{t} = \frac{v}{4}$; на первой половине она должна быть меньше, потому что быстрые участки в основном во второй половине: $\frac{3}{20}v < \frac{5}{20}v$. Ещё проверка: вторая половина пути $5S$ пройдена за $10t - \frac{25}{3}t = \frac{5}{3}t$, средняя скорость на ней $3S/t = \frac{3}{4}v$ — между $\frac{3}{8}v$ и v, как и должно быть.

Смысл: автомобиль разгонялся от участка к участку, поэтому первую половину пути он ехал в 5 раз дольше второй.

У организаторов в исходном ответе стоит $\frac{5}{20}v$; из их же формул $v_{\text{ср}} = \frac{3S}{5t}$ и $v = \frac{4S}{t}$ следует $\frac{3}{20}v$.

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{3}{20}\,v$.