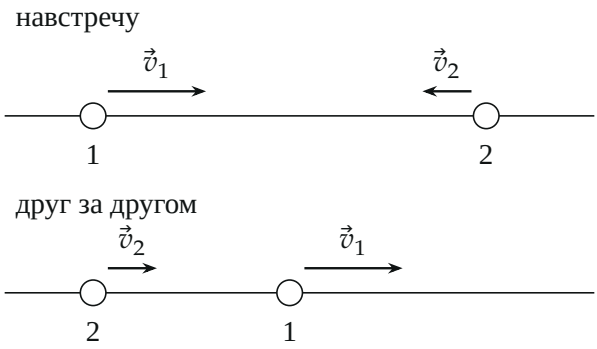
Тела навстречу и вдогонку

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 8 класс, задача 1] Если два тела будут двигаться навстречу друг другу, то расстояние между ними будет уменьшаться на величину Δl за каждые Δt секунд. Если тела будут двигаться друг за другом, то расстояние между ними будет увеличиваться на величину $2\Delta l$ за каждые $6\Delta t$ секунд. Найти скорости тел.



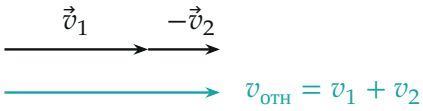
Поясняющий рисунок: два случая движения тел. Быстрое тело (1) в случае «друг за другом» — впереди, иначе расстояние бы не росло

▲ **Решение. Что происходит.** Расстояние между телами меняется со скоростью, равной *относительной* скорости тел. Навстречу — скорости складываются, друг за другом — вычитаются. Два случая дают два уравнения на две неизвестные скорости. Класс задачи — относительное движение по прямой.

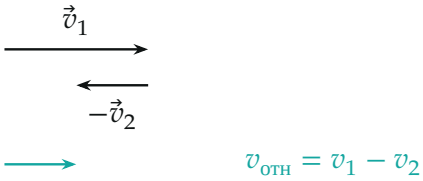
Обозначения. v_1, v_2 — модули скоростей тел, $v_1 > v_2$ (тело 1 быстрее; в случае «друг за другом» расстояние растёт, значит, впереди едет быстрое тело).

1. Переходим в систему отсчёта тела 2. В ней тело 2 стоит, а тело 1 движется со скоростью $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Расстояние между телами меняется ровно с модулем этой относительной скорости.

навстречу



друг за другом



Относительная скорость $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$: навстречу модули складываются, друг за другом — вычитаются

2. Навстречу. Относительная скорость равна $v_1 + v_2$; за время Δt расстояние уменьшается на Δl:

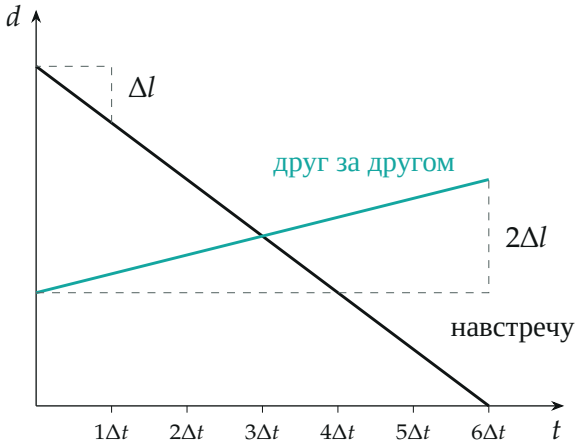
$$v_1 + v_2 = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

3. Друг за другом. Относительная скорость равна $v_1 - v_2$; за время $6\Delta t$ расстояние растёт на $2\Delta l$:

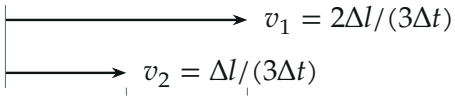
$$v_1 - v_2 = \frac{2\Delta l}{6\Delta t} = \frac{1}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

4. Решаем систему. Сложим уравнения — уйдёт v_2; вычтем — уйдёт v_1:

$$2v_1 = \frac{4}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}, \qquad 2v_2 = \frac{2}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}, \qquad v_2 = \frac{1}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}.$$



Расстояние d между телами от времени: наклон графика — относительная скорость. Навстречу d падает на Δl за Δt, друг за другом растёт на $2\Delta l$ за $6\Delta t$



Ответ в масштабе: первое тело ровно вдвое быстрее второго

Обратите внимание. В случае «друг за другом» расстояние *растёт*, значит, впереди едет более быстрое тело. Если бы впереди было медленное, расстояние уменьшалось бы.

Проверка. Размерность: $\Delta l/\Delta t$ — скорость. Подстановка: навстречу $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$, то есть за Δt расстояние уменьшается на Δl; друг за другом $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, за $6\Delta t$ расстояние растёт на $6\cdot\frac{1}{3}\Delta l=2\Delta l$. Оба условия выполнены.

Смысл: сумма и разность скоростей тел известны из двух опытов, а по сумме и разности числа находятся однозначно.

Ответ. $v_1=\frac{2}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}$, $v_2=\frac{1}{3}\frac{\Delta l}{\Delta t}$ (первое тело вдвое быстрее второго).