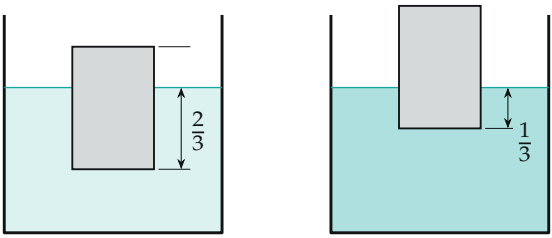
Брусок в смеси жидкостей

Задача 2. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 8 класс, задача 2] Деревянный брусок плавает в одной жидкости, погрузившись на $2/3$ своего объема. Тот же брусок плавает в другой жидкости, погрузившись на $1/3$ своего объема. Смешивают массу M первой жидкости и массу $M/2$ второй жидкостей. На какую часть своего объема погрузится в эту смесь тот же брусок? Объем смеси жидкости равен сумме объемов ее компонент.



жидкость 1 жидкость 2

Поясняющий рисунок: в первой жидкости брусок погружён на $2/3$ объёма, во второй — на $1/3$

▲ **Решение. Что происходит.** Плавающий брусок погружается так, чтобы сила Архимеда уравновесила силу тяжести. Чем плотнее жидкость, тем меньшая часть бруска в ней. Поэтому глубина погружения — это «прибор», который измеряет плотность жидкости в долях плотности бруска. Из двух опытов найдём плотности жидкостей, затем среднюю плотность смеси, затем погружение в смеси. Класс задачи — плавание тел и средняя плотность смеси.

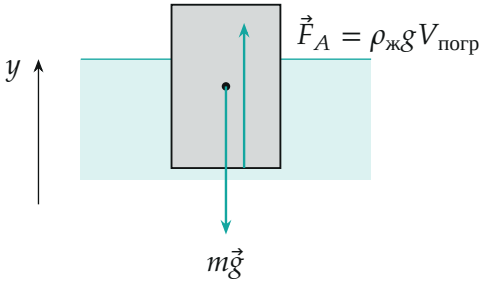
Обозначения. ρ_0 — плотность бруска, V — его объём; ρ_1, ρ_2 — плотности первой и второй жидкостей; ρ — плотность смеси; k — искомая доля погружённого объёма.

1. Условие плавания. На плавающий брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (вверх); брусок в покое, поэтому по второму закону Ньютона в проекции на вертикаль $F_A = mg$. Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости, то есть $\rho_ж\, g\, V_{погр}$, масса бруска

$m = \rho_0 V$:

$$\rho_ж g V_{погр} = \rho_0 V g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{погр}}{V} = \frac{\rho_0}{\rho_ж}.$$

Доля погружённого объёма равна отношению плотности бруска к плотности жидкости.



Силы на плавающий брусок: сила тяжести из центра масс и сила Архимеда, приложенная к погружённой части

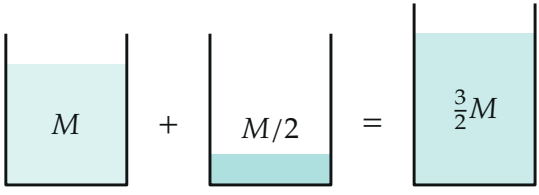
2. Плотности жидкостей через плотность бруска. Из первого опыта $\rho_0/\rho_1 = 2/3$, из второго $\rho_0/\rho_2 = 1/3$:

$$\rho_1 = \frac{3}{2}\rho_0, \qquad \rho_2 = 3\rho_0.$$

Вторая жидкость вдвое плотнее первой.

3. Плотность смеси. Плотность смеси — это вся масса, делённая на весь объём (объёмы складываются по условию). Объём массы M первой жидкости M/ρ_1, массы $M/2$ второй — $M/(2\rho_2)$:

$$\rho = \frac{M + \frac{M}{2}}{\frac{M}{\rho_1} + \frac{M}{2\rho_2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3\rho_0} + \frac{1}{6\rho_0}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{6\rho_0}} = \frac{9}{5}\rho_0.$$

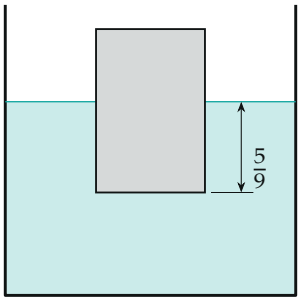


$V_1 = \dfrac{M}{\rho_1}$ $V_2 = \dfrac{M}{2\rho_2}$ $V_1 + V_2$

Смешивание: массы и объёмы складываются (по высоте — объёмы в масштабе: $V_2 = V_1/4$)

4. Погружение в смеси. По формуле шага 1:

$$k = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0}{\frac{9}{5}\rho_0} = \frac{5}{9}.$$



смесь

В смеси брусок погружён на $5/9$ объёма — между $1/3$ и $2/3$

Обратите внимание. Плотность смеси — не среднее арифметическое плотностей $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ и не среднее «по массам»: делить надо общую массу на общий объём. С массами M и $M/2$ получилось $\rho = \frac{6}{5}\rho_1$, а не $\frac{3}{2}\rho_1$.

Проверка. Ответ безразмерный и лежит между $1/3$ и $2/3$: смесь плотнее первой жидкости, но легче второй — верно. Второй способ — через объёмы. Возьмём $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 6$ (в единицах, где $\rho_0 = 2$) и $M = 6$: объёмы $6/3 = 2$ и $3/6 = 0{,}5$, масса 9, объём 2,5, $\rho = 3{,}6$, и $k = 2/3{,}6 = 5/9$. Совпало.

Смысл: смесь «весит» как жидкость плотностью $1{,}8\rho_0$, поэтому брусок сидит в ней на $1/1{,}8 = 5/9$ объёма.

Ответ. $k = \dfrac{5}{9}$.