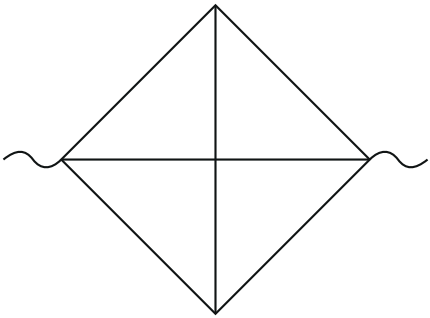
Квадрат с диагоналями

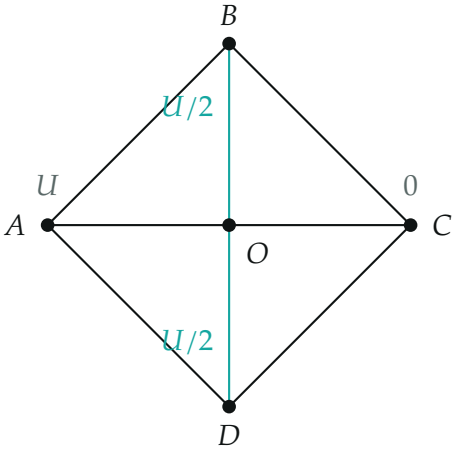
Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 8 класс, задача 3] Из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно λ, изготовили квадрат со стороной a с двумя диагоналями. Найти его сопротивление, если он включается в цепь между двумя противоположными вершинами (см. рисунок). В точке пересечения диагоналей между ними есть электрический контакт.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Ток входит в левую вершину и выходит из правой. Цепь симметрична: относительно горизонтальной диагонали (верх и низ одинаковы) и относительно вертикальной (левая половина — зеркало правой с обращённым током). Из симметрии все точки вертикальной диагонали оказываются при одном потенциале, ток по ней не течёт, и её можно выбросить. Остаются три параллельных проводника. Класс задачи — сопротивление симметричной цепи: точки равного потенциала.

Обозначения. A и C — вершины подключения (слева и справа), B и D — верхняя и нижняя вершины, O — центр (точка контакта диагоналей); U — напряжение между A и C, потенциал C примем равным нулю, A — равным U.

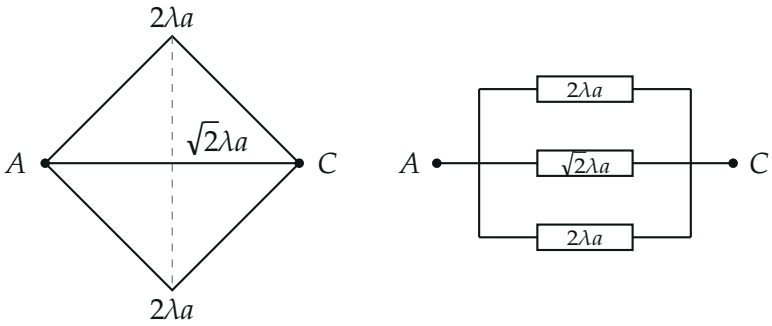
1. Сопротивления участков. Проволока однородна, поэтому сопротивление куска пропорционально его длине: $R = \lambda \cdot (\text{длина})$. Сторона: λa. Половина диагонали: $\lambda a\sqrt{2}/2$.



Из симметрии вся вертикальная диагональ BOD (бирюзовая) имеет потенциал $U/2$: ток по ней не течёт

2. Потенциалы точек B**,** O**,** D**.** Повернём картинку на 180° вокруг центра и поменяем знак напряжения: A и C поменяются местами, цепь совпадёт сама с собой. Значит, потенциал любой точки отстоит от U на столько же, на сколько потенциал симметричной ей точки отстоит от 0: $\varphi_X = U - \varphi_{X'}$. Точка O переходит сама в себя: $\varphi_O = U - \varphi_O$, откуда $\varphi_O = U/2$. Точки B и D переходят друг в друга: $\varphi_B = U - \varphi_D$. А из зеркальной симметрии «верх — низ» (отражение относительно AC не меняет ни цепь, ни точки подключения) $\varphi_B = \varphi_D$. Отсюда $\varphi_B = \varphi_D = U/2$.

3. Ток по вертикальной диагонали. Концы каждой половины BO и OD при одном потенциале $U/2$; по закону Ома ток в ней $I = \Delta\varphi/R = 0$. Проводник без тока можно удалить — в остальной цепи ничего не изменится, и сопротивление между A и C останется тем же.

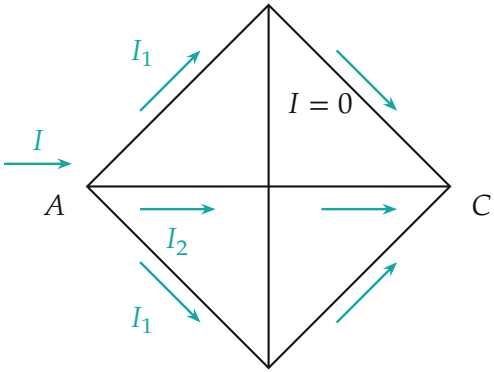


После удаления диагонали BD (пунктир): три параллельные ветви — путь через B, горизонтальная диагональ, путь через D

4. Три параллельных проводника. Путь $A \to B \to C$ — две стороны, $2\lambda a$; горизонтальная диагональ (центр O на ней теперь просто точка провода) — $\sqrt{2}\lambda a$; путь $A \to D \to C$ — $2\lambda a$. При параллельном соединении складываются обратные сопротивления:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\lambda a} + \frac{1}{\sqrt{2}\lambda a} + \frac{1}{2\lambda a} = \frac{1}{\lambda a}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\,\lambda a},$$

$$R = \frac{\sqrt{2}\,\lambda a}{\sqrt{2}+1} = (2-\sqrt{2})\,\lambda a \approx 0{,}59\,\lambda a.$$



Токи: по сторонам $I_1 = \dfrac{U}{2\lambda a}$, *по горизонтальной диагонали* $I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{2}\lambda a} = \sqrt{2}\,I_1$, *по вертикальной — ноль*

Обратите внимание. Контакт в центре здесь ничего не меняет — именно потому, что центр O и вся диагональ BD при одном потенциале. Если бы диагонали не были соединены, ответ был бы тем же.

Проверка. Размерность: λa — сопротивление. Оценка: R меньше наименьшей из ветвей $\sqrt{2}\lambda a \approx 1{,}41\lambda a$, как и должно быть при параллельном соединении. Второй способ — закон Ома для токов: при напряжении U полный ток $I = 2I_1 + I_2 = \frac{U}{\lambda a} + \frac{U}{\sqrt{2}\lambda a}$, и $R = U/I = \frac{\sqrt{2}\lambda a}{\sqrt{2}+1}$ — совпало.

Смысл: из-за симметрии поперечная диагональ «выключена», и квадрат с двумя диагоналями ведёт себя как три параллельных провода.

Ответ. $R = \dfrac{\sqrt{2}\,\lambda a}{\sqrt{2}+1} = (2-\sqrt{2})\,\lambda a \approx 0{,}59\,\lambda a.$