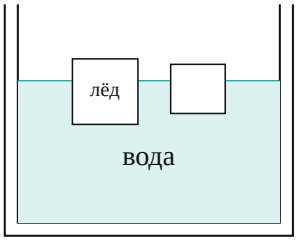
Вода и лёд в калориметре

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 8 класс, задача 4] При смешении воды с некоторой положительной температурой и льда с некоторой отрицательной температурой были получены следующие результаты. Если масса льда превышает массу воды более чем в n раз, то после установления равновесия в калориметре будет один лед. Если масса воды превышает массу льда более чем в $2n$ раз, то после установления равновесия в калориметре будет только вода. При каком соотношении масс льда и воды $m_л/m_в$ (с теми же начальными температурами) после установления равновесия в калориметре останется такое же количество воды и льда.



лёд: $m_л$, $t_л < 0$

вода: $m_в$, $t_в > 0$

Поясняющий рисунок: в калориметр кладут лёд и наливают воду с теми же начальными температурами, меняют только массы

▲ **Решение. Что происходит.** Начальные температуры неизвестны, но два граничных опыта их «измеряют». Граница «один лёд» — это случай, когда вся вода остыла до 0 °C и *ровно вся* замёрзла, а лёд нагрелся ровно до 0 °C. Граница «одна вода» — когда весь лёд нагрелся до 0 °C и *ровно весь* растаял, а вода остыла до 0 °C. Количество воды и льда не меняется, когда лёд нагревается до 0 °C, вода остывает до 0 °C и больше ничего не происходит. Каждый случай — уравнение теплового баланса. Класс задачи — тепловой баланс с фазовым переходом; неизвестные температуры исключаются.

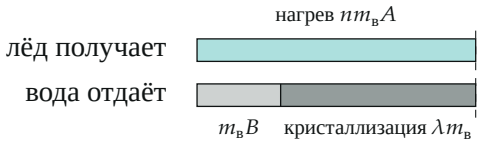
Обозначения. $c_л$, $c_в$ — удельные теплоёмкости льда и воды, λ — удельная теплота плавления льда, $t_л < 0$ и $t_в > 0$ — начальные температуры в °C. Удобные положительные величины: $A = c_л|t_л|$ — теплота на нагрев 1 кг льда до 0 °C, $B = c_в t_в$ — теплота, которую отдаёт 1 кг воды при остывании до 0 °C.

1. Уравнение теплового баланса. Калориметр теплоизолирован, поэтому теплота, полученная льдом, равна теплоте, отданной водой. В каждом граничном случае конечная температура 0 °C, поэтому вода остывает ровно на $t_в$, лёд нагревается ровно на $|t_л|$.

2. Граница «один лёд»: $m_л = nm_в$. Лёд получает теплоту на нагрев до 0 °C: $nm_вA$. Вода отдаёт теплоту при остывании до 0 °C и при кристаллизации целиком: $m_вB + \lambda m_в$. Сократив $m_в$:

$$nA = B + \lambda. \tag{1}$$

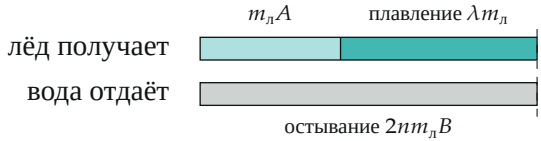
При большем избытке льда воды замёрзло бы «с запасом» и лёд не дошёл бы до 0 °C — будет один лёд, как и сказано в условии.



Граница «один лёд» ($m_л = nm_в$): теплота, полученная льдом, равна теплоте остывания и полной кристаллизации воды. Полосы — в масштабе для $n = 2$

3. Граница «одна вода»: $m_в = 2nm_л$. Лёд получает теплоту на нагрев до 0 °C и на плавление целиком: $m_лA + \lambda m_л$. Вода отдаёт теплоту при остывании до 0 °C: $2nm_лB$. Сократив $m_л$:

$$A + \lambda = 2nB. \tag{2}$$



Граница «одна вода» ($m_в = 2nm_л$): теплота нагрева и полного плавления льда равна теплоте остывания воды ($n = 2$)

4. Находим A и B. Из (1) $B = nA - \lambda$; подставим в (2):

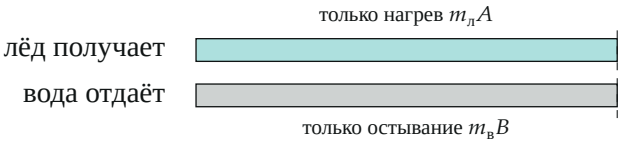
$$A + \lambda = 2n^2 A - 2n\lambda \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\lambda(2n+1)}{2n^2-1},$$

$$B = nA - \lambda = \frac{\lambda(n+1)}{2n^2-1}.$$

Обе величины должны быть положительны, поэтому условие задачи возможно только при $2n^2 > 1$.

5. Масса льда и воды не меняется. Это значит: никакая часть льда не растаяла и никакая часть воды не замёрзла, а в равновесии лёд и вода сосуществуют — значит, конечная температура 0 °C. Лёд нагрелся ровно до 0 °C, вода остыла ровно до 0 °C, фазовых переходов нет:

$$m_л A = m_в B \quad \Rightarrow \quad \frac{m_л}{m_в} = \frac{B}{A} = \frac{n+1}{2n+1}.$$



Искомый случай: ни плавления, ни кристаллизации — нагрев льда до 0 °C оплачен ровно остыванием воды до 0 °C ($n = 2$, $m_л : m_в = 3 : 5$)

Обратите внимание. Температуры в уравнениях — в градусах Цельсия: только тогда «нагрев до 0 °C» — это $c_л|t_л|$, а «остывание до 0 °C» — $c_в t_в$. И граничные значения «более чем в n раз» соответствуют ровно $m_л = nm_в$: при таком отношении лёд только-только успевает заморозить всю воду.

Проверка. Ответ безразмерный. Числа: при $n = 2$ получаем $A = \frac{5}{7}\lambda$, $B = \frac{3}{7}\lambda$; опыт 1 ($m_в = 1$, $m_л = 2$): $2A = \frac{10}{7}\lambda = B + \lambda$ — верно; опыт 2 ($m_л = 1$, $m_в = 4$): $A + \lambda = \frac{12}{7}\lambda = 4B$ — верно; искомое отношение $\frac{3}{5}$: $3A = 5B = \frac{15}{7}\lambda$ — верно. Ответ лежит между границами: $\frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2n+1} < n$, то есть между «одной водой» и «одним льдом», — как и должно быть.

Смысл: граничные опыты дают теплоты нагрева льда и остывания воды в единицах λ, а без фазовых переходов отношение масс — это просто отношение этих теплот.

Ответ. $\dfrac{m_{\text{л}}}{m_{\text{в}}} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.