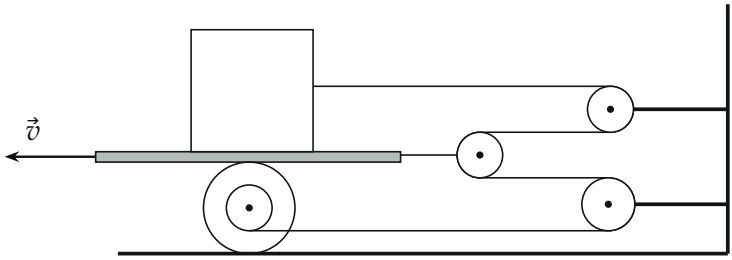
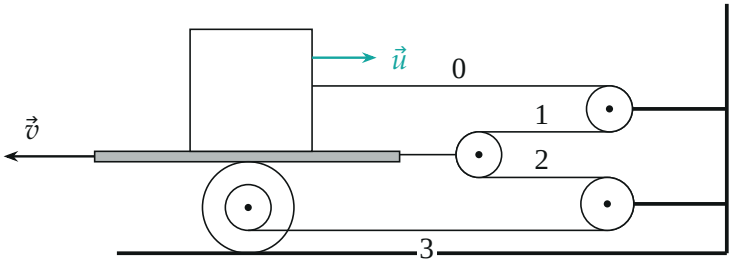
Куб на доске, катушка и блоки

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 8 класс, задача 5] Намотанную на катушку нитку пропустили через систему трех блоков – двух неподвижных и одного подвижного – и привязали к кубу, который находится на доске, лежащей на катушке и привязанной к оси подвижного блока (см. рисунок). Внешний радиус катушки вдвое больше радиуса намотки нитки. Доску тянут со скоростью v. Найти скорость куба. Проскальзывания между катушкой и доской, а также катушкой и полом — нет.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Нить нерастяжима: сколько её прибавилось на одних участках, столько убавилось на других (с поправкой на то, что катушка сматывает или наматывает нить). Доска тянет подвижный блок влево — два участка нити между блоками удлиняются. Катушка катится без проскальзывания под доской: её центр едет вдвое медленнее доски, и нить с неё сматывается. Весь этот «расход» нити покрывает участок, привязанный к кубу, — он укорачивается, и куб едет вправо. Класс задачи — кинематические связи: нерастяжимая нить и качение без проскальзывания.

Обозначения. Участки нити (см. рисунок): 0 — от куба до верхнего неподвижного блока, 1 — от верхнего блока до подвижного, 2 — от подвижного до нижнего неподвижного, 3 — от нижнего блока до катушки. R — внешний радиус катушки, $r = R/2$ — радиус намотки; $\vec{u}$ — скорость куба (относительно пола); Δt — малое время.



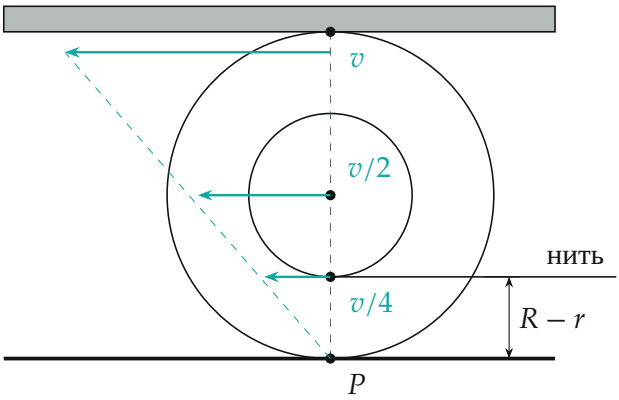
Участки нити 0–3. Доска и подвижный блок едут влево со скоростью v, куб — со скоростью u

1. Участки 1 и 2. Подвижный блок привязан к доске и едет влево со скоростью v, неподвижные блоки стоят. Участки 1 и 2 горизонтальны и тянутся от подвижного блока к неподвижным, поэтому каждый удлиняется на $v\Delta t$:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = v\Delta t.$$

2. Скорости точек катушки. Катушка не проскальзывает по полу: её нижняя точка неподвижна. Она не проскальзывает и по доске: верхняя точка едет вместе с доской, со скоростью v влево. Катушка вращается вокруг нижней точки (мгновенная ось), поэтому скорость точек вертикального диаметра растёт линейно с высотой над полом. Центр (высота R) едет со скоростью $v/2$, нижняя точка намотки (высота $R - r = R/2$) — со скоростью

$$v_{\text{нам}} = v \cdot \frac{R - r}{2R} = \frac{v}{4} \quad \text{влево.}$$



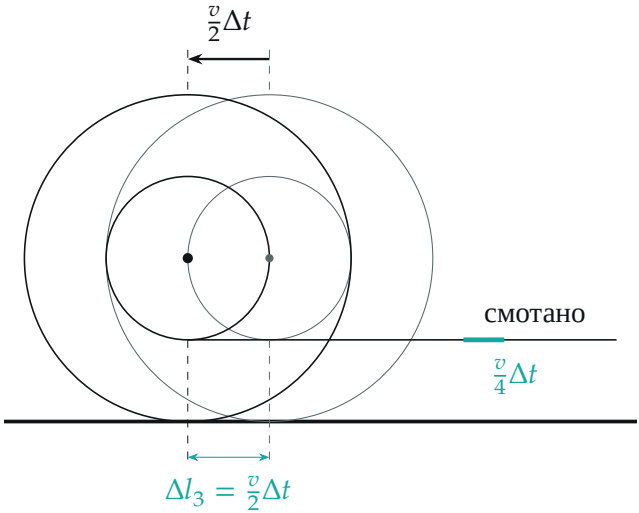
Скорости точек вертикального диаметра катушки: катушка вращается вокруг точки касания с полом P, скорость пропорциональна высоте

3. Сколько нити сматывается с катушки. Относительно центра катушки нижняя точка намотки движется вправо со скоростью $\frac{v}{2} - \frac{v}{4} = \frac{v}{4}$ (катушка вращается против часовой стрелки). Нить уходит с катушки как раз из этой точки вправо, поэтому за время Δt с катушки сматывается кусок нити длиной

$$\Delta l_{\text{см}} = \frac{v}{4}\Delta t.$$

Сама точка схода нити едет вместе с центром катушки влево на $\frac{v}{2}\Delta t$, поэтому участок 3 удлиняется:

$$\Delta l_3 = \frac{v}{2}\Delta t.$$



За время Δt центр катушки сдвигается влево на $\frac{v}{2}\Delta t$ (серым — прежнее положение), участок 3 удлиняется на столько же, а с катушки сматывается $\frac{v}{4}\Delta t$ нити

4. Баланс нити. Нить нерастяжима: длина свободной (несмотанной) части нити — сумма участков 0–3 — выросла ровно на смотанный ку-

сок:

$$\Delta l_0 + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta l_{\text{см}},$$

$$\Delta l_0 = \frac{v}{4}\Delta t - v\Delta t - v\Delta t - \frac{v}{2}\Delta t = -\frac{9}{4}\,v\Delta t.$$

Участок 0 укорачивается. Его правый конец лежит на неподвижном блоке, левый привязан к кубу, поэтому куб сдвигается вправо на $\frac{9}{4}v\Delta t$:

$$u = \frac{9}{4}\,v = 2{,}25\,v \quad \text{вправо}.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что с катушки сматывается нить со скоростью точки обода или центра. Сматывание определяется движением точки намотки *относительно центра* ($v/4$), а сдвиг самой катушки ($v/2$) учитывается отдельно, через длину участка 3.

Проверка. Размерность верна. Второй способ — координаты: пусть $x_{\text{к}}$ — координата куба, $x_{\text{п}} = -vt$ — подвижного блока, $x_{\text{с}} = -\frac{v}{2}t$ — центра катушки, X_1, X_2 — неподвижных блоков, φ — угол поворота катушки ($\dot\varphi = \frac{v}{2R}$). Длина всей нити $(X_1 - x_{\text{к}}) + (X_1 - x_{\text{п}}) + (X_2 - x_{\text{п}}) + (X_2 - x_{\text{с}}) +$ (намотано) постоянна, а намотанное убывает со скоростью $r\dot\varphi = \frac{v}{4}$. Производная по времени: $-\dot x_{\text{к}} + v + v + \frac{v}{2} - \frac{v}{4} = 0$, откуда $\dot x_{\text{к}} = \frac{9}{4}v$ — совпало.

Смысл: каждый удлинившийся участок «берёт» нить у участка 0, и куб едет вправо быстрее, чем тянут доску.

Ответ. $u = \frac{9}{4}\,v = 2{,}25\,v$, куб движется вправо (против направления движения доски).