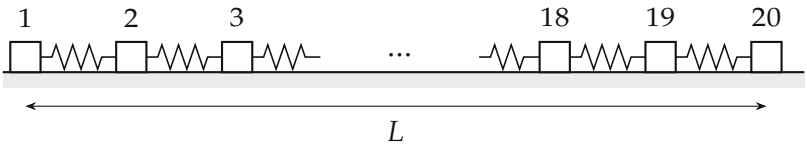
Цепочка тел на пружинах

Задача 1. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 1] На горизонтальной поверхности находятся 20 тел массой m каждое, связанные пружинами с жесткостью k и длиной в недеформированном состоянии l_0. Тела аккуратно двигают по поверхности, растягивая пружины. Найти максимальную длину цепочки тел, при которой все тела будут находиться в покое. Коэффициент трения между телами и поверхностью μ. Для любых растяжений пружин выполняется закон Гука. Размерами тел пренебречь.



Поясняющий рисунок: 20 тел и 19 пружин, L — длина цепочки

▲ **Решение. Что происходит.** Покоящееся тело держит сила трения покоя, но она не больше μmg. На каждое тело с двух сторон тянут пружины; трение может скомпенсировать только разность их сил, не больше μmg. Крайнее тело тянет одна пружина, поэтому её натяжение не больше μmg; следующая пружина может быть натянута сильнее ещё на μmg, и так далее к середине. Длина цепочки максимальна, когда каждое ограничение выполнено на пределе. Класс задачи — равновесие тел с трением покоя (первый закон Ньютона для каждого тела + закон Гука).

Обозначения. Пружины пронумерованы $i = 1, 2, \ldots, 19$ слева направо, x_i — удлинение i-й пружины, $T_i = kx_i$ — её сила упругости; $\Delta x = \mu mg/k$ — удлинение пружины с силой упругости μmg.

1. Крайнее тело. На левое крайнее тело действует только пружина 1 (вправо) и сила трения покоя (влево). Первый закон Ньютона в проекции на ось вдоль цепочки и предел силы трения покоя:

$$kx_1 = F_{\text{тр}} \le \mu mg \quad \Rightarrow \quad x_1 \le \Delta x.$$

2. Тело внутри цепочки. Тело между пружинами i и $i+1$: пружины

тянут его в разные стороны, трение компенсирует разность:

$$|kx_{i+1} - kx_i| = F_{\text{тр}} \le \mu mg \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} \le x_i + \Delta x.$$

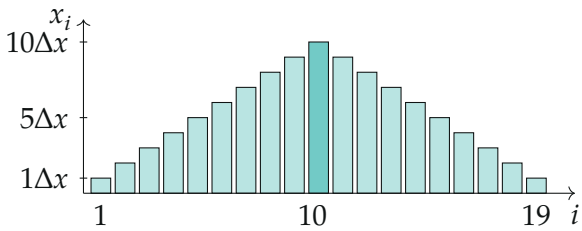


Силы на тело внутри цепочки: две силы упругости и трение покоя

3. Наибольшие удлинения. Идя слева, получаем $x_1 \le \Delta x$, $x_2 \le 2\Delta x$, …, $x_i \le i\,\Delta x$. Справа то же: правое крайнее тело даёт $x_{19} \le \Delta x$, и $x_i \le (20 - i)\,\Delta x$. Оба ограничения сразу:

$$x_i \le \min(i,\ 20 - i)\,\Delta x.$$

Все эти пределы достижимы одновременно: соседние пружины отличаются ровно на Δx, а у среднего (десятого и одиннадцатого) тела пружины $9\Delta x$ и $10\Delta x$ — тоже разница Δx. Каждое тело на грани сдвига, но в покое.



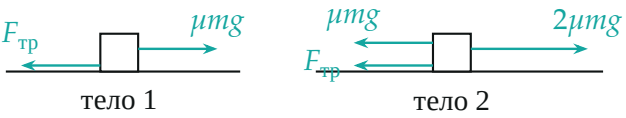
Наибольшие удлинения пружин: растут на Δx от краёв к середине, у средней (10-й) пружины — $10\Delta x$

4. Длина цепочки. Размеров у тел нет, поэтому длина цепочки — сумма длин 19 пружин:

$$L = 19\,l_0 + \sum_{i=1}^{19} x_i = 19\,l_0 + [2\,(1+2+\cdots+9)+10]\Delta x = 19\,l_0 + (90+10)\,\Delta x.$$

(сумма $1+2+\dots+9=\frac{9\cdot10}{2}=45$). Итак,

$$L_{\max}=19\,l_0+100\,\frac{\mu mg}{k}.$$



Силы на первые два тела: пружины тянут с силами μmg и $2\mu mg$, трение покоя на каждом теле на пределе, $F_{тр}=\mu mg$

Обратите внимание. Пружин 19, нечётное число: средняя пружина одна (10-я), и её «потолок» $10\Delta x$ одинаков при счёте с обоих концов. Считать $2\,(1+\dots+10)\Delta x=110\,\Delta x$ — ошибка: так средняя пружина посчитана дважды.

Ответ. $L_{\max}=19\,l_0+100\,\frac{\mu mg}{k}$.

Проверка. Размерность: $\frac{\mu mg}{k}=\frac{\text{Н}}{\text{Н/м}}=$ м. Предел $\mu\to0$: без трения пружины растянуты быть не могут, $L=19\,l_0$ — верно. Маленькая проверка той же формулой: 3 тела, 2 пружины — каждая не больше Δx, $L=2l_0+2\Delta x$; общая формула $\sum\min(i,N-i)$ при $N=3$ даёт $1+1=2$ — то же.

Смысл: трение каждого тела «добавляет» к натяжению по μmg, поэтому от краёв к середине натяжение может расти ступеньками.

Ответ. $L_{\max}=19\,l_0+100\,\frac{\mu mg}{k}$.