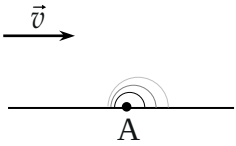
# Волна на течении реки

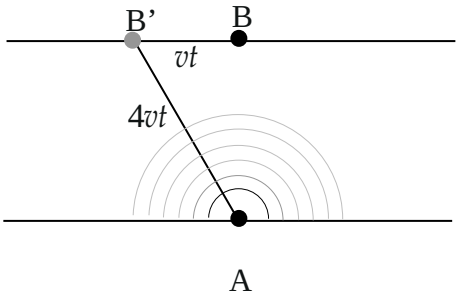
**Задача 2.** [Росатом 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 2] Около берега текущей со скоростью $v$ реки бросили камень (в точке A), и по поверхности воды стала распространяться волна (см. рисунок). Через какое время волна достигнет точки B на другом берегу реки, расположенной напротив точки A, если ширина реки $l$, скорость волны в стоячей воде составляет $4v$?




▲ **Решение.** **Что происходит.** Волна бежит по воде, а вода сама движется. Относительно воды волна расходится от точки падения камня во все стороны с одной и той же скоростью $4v$ — полуокружностями. Поэтому удобно решать в системе отсчёта, связанной с водой: в ней волна простая, а вот точка B на берегу движется против течения со скоростью $v$. Класс задачи — относительное движение (закон сложения скоростей Галилея).

**Обозначения.** Ось $x$ — вдоль течения, ось $y$ — поперёк реки от A к B; $t$ — искомое время; B′ — положение точки B в системе отсчёта воды в момент прихода волны.

**1. Система отсчёта воды.** В ней точка падения камня A неподвижна (волна родилась в воде у A), фронт волны в момент $t$ — окружность радиуса $4vt$ с центром в A. Берег вместе с точкой B едет против течения со скоростью $v$, и к моменту $t$ точка B сместилась на $vt$ в положение B′.

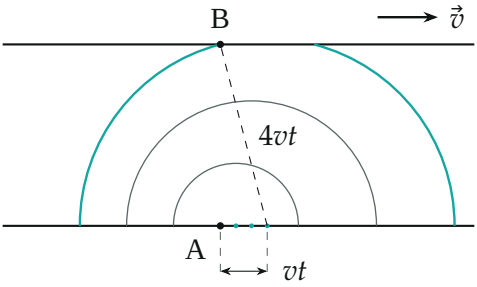



*Система отсчёта воды: волна — окружности с центром в A, точка B уехала в B′ на расстояние $vt$ против течения*

**2. Условие встречи.** Волна дошла до B, когда B′ лежит на фронте: $AB' = 4vt$. Треугольник A B B′ прямоугольный (AB перпендикулярна берегу), по теореме Пифагора:

$$(4vt)^2 = l^2 + (vt)^2 \quad \Rightarrow \quad 15\,v^2t^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{\sqrt{15}\,v}.$$

**3. Как это выглядит с берега.** В системе отсчёта берега каждая окружность-фронт сносится течением: её центр за время $t$ уходит на $vt$ вниз по течению, а радиус растёт как $4vt$. Фронт приходит в B, когда расстояние от сместившегося центра до B равно радиусу — то же уравнение. Ниже фронты построены для моментов $\frac{1}{3}t$, $\frac{2}{3}t$ и $t$.

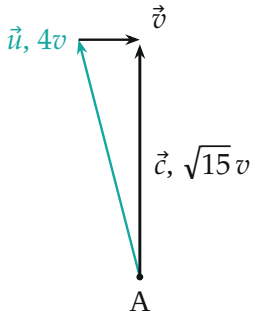



*С берега: фронты в моменты $\frac{1}{3}t$, $\frac{2}{3}t$, $t$, их центры сносит течение*

**4. Второй способ: скорость волны относительно берега.** По закону сложения скоростей скорость волны относительно берега $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$, где

$|\vec{u}| = 4v$ — скорость волны относительно воды. В точку B, лежащую напротив A, волна приходит по прямой AB, так что $\vec{c}$ перпендикулярна берегу: $\vec{u}$ должна быть наклонена против течения и гасить снос:

$$c = \sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{16v^2 - v^2} = \sqrt{15}\,v, \qquad t = \frac{l}{c} = \frac{l}{\sqrt{15}\,v}.$$




*Треугольник скоростей у берега: $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$ направлена прямо поперёк реки*

**Обратите внимание.** Волна, которая приходит в B, вышла из A не перпендикулярно берегу, а немного против течения: перпендикулярная часть фронта снесена вниз по течению и попадает правее B.

**Ответ.** $t = \dfrac{l}{\sqrt{(4v)^2 - v^2}} = \dfrac{l}{\sqrt{15}\,v} \approx 0{,}26\,\dfrac{l}{v}$.

**Проверка.** Размерность: $\dfrac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}$. Предел: без течения волна шла бы прямо со скоростью $4v$, $t = \frac{l}{4v}$; течение время увеличивает ($\sqrt{15} < 4$), как и должно быть. Если бы скорость волны была равна скорости течения, волна вообще не добралась бы до B (корень обращается в ноль).

Смысл: течение сносит волну, и до точки напротив доходит только та часть фронта, которая шла немного против течения.

**Ответ.** $t = \dfrac{l}{\sqrt{15}\,v}$.