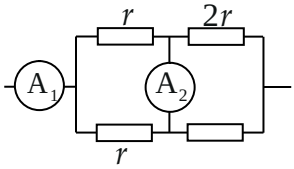
Цепь с двумя амперметрами

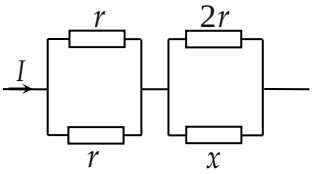
Задача 3. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 3] В цепи, схема которой приведена на рисунке, сопротивления трех резисторов известны, четвертого — нет. Найти его сопротивление, если отношение показаний идеальных амперметров равно $n = 0{,}25$. Известные сопротивления приведены на рисунке.



▲ **Решение. Что происходит.** Идеальный амперметр не имеет сопротивления — это просто провод, показывающий ток. Значит, амперметр A_2 соединяет средние узлы верхней и нижней ветвей, и их потенциалы равны. Тогда цепь — это два последовательных участка: пара резисторов r, r параллельно и пара $2r$, x параллельно. Амперметр A_1 показывает полный ток, A_2 — ток, перетекающий между ветвями в середине. Направление тока через A_2 не задано, поэтому возможны два ответа. Класс задачи — расчёт цепей постоянного тока (закон Ома + закон сохранения заряда для узлов).

Обозначения. I — показание A_1 (ток во всей цепи); nI — показание A_2; x — неизвестное сопротивление (нижний правый резистор); $I_в$, $I_н$ — токи через $2r$ и x.

1. Эквивалентная схема. Заменим амперметры проводами. Средние узлы соединены, и цепь превращается в два параллельных соединения, включённых последовательно.



Эквивалентная схема: идеальный амперметр A_2 заменён проводом, средние узлы слились

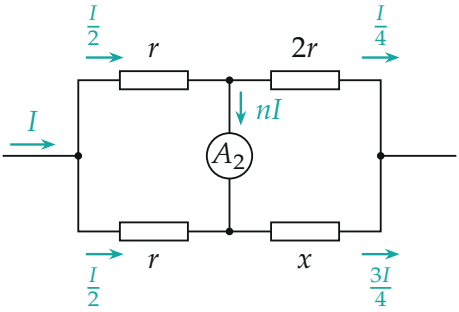
2. Левый участок. Резисторы r и r подключены к одним и тем же узлам, напряжения на них равны, сопротивления равны — по закону Ома и токи равны. Закон сохранения заряда для левого узла: $I = I/2 + I/2$, то есть в верхней и нижней левых ветвях по $I/2$.

3. Ток через A_2 вниз. Закон сохранения заряда для верхнего среднего узла: приходит $I/2$, уходит nI вниз через A_2 и $I_в$ направо. Для нижнего среднего узла: приходит $I/2$ слева и nI сверху, уходит $I_н$:

$$I_в = \frac{I}{2} - nI = \frac{1-2n}{2} I = \frac{I}{4}, \qquad I_н = \frac{I}{2} + nI = \frac{1+2n}{2} I = \frac{3I}{4}.$$

Резисторы $2r$ и x соединены параллельно, напряжения на них равны (закон Ома):

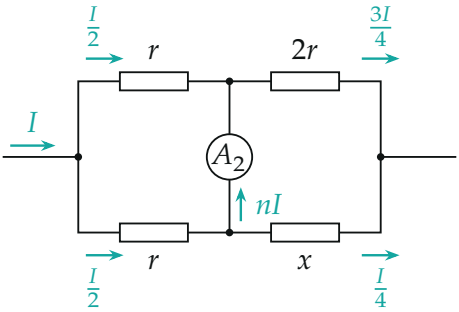
$$I_в \cdot 2r = I_н\, x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{I_в}{I_н} 2r = \frac{1-2n}{1+2n} 2r = \frac{1}{3} \cdot 2r = \frac{2}{3} r.$$



Первый случай: ток через A_2 течёт вниз, больший ток идёт через x, значит, $x < 2r$

4. Ток через A_2 вверх. Теперь верхний средний узел получает ещё nI снизу:

$$I_в = \frac{1+2n}{2} I = \frac{3I}{4}, \qquad I_н = \frac{1-2n}{2} I = \frac{I}{4}, \qquad x = \frac{1+2n}{1-2n} 2r = 6r.$$

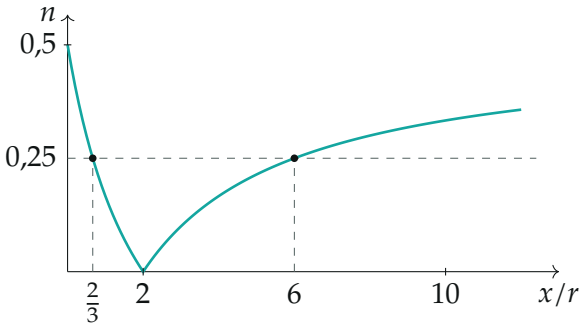


Второй случай: ток через A_2 течёт вверх, больший ток идёт через $2r$, значит, $x > 2r$

5. Оба случая на одном графике. В общем виде ток через $2r$ по правилу деления тока между параллельными ветвями равен $I\frac{x}{2r+x}$, и показание A_2

$$n = \left|\frac{1}{2} - \frac{x}{2r+x}\right| = \frac{|2r-x|}{2\,(2r+x)}.$$

График $n(x)$ пересекает уровень 0,25 ровно в двух точках: $x = \frac{2}{3}r$ и $x = 6r$.



Отношение показаний амперметров в зависимости от x: при $x = 2r$ мост уравновешен и A_2 показывает ноль

Обратите внимание. Показание A_2 не больше $I/2$ (оно не может превысить ток верхней или нижней левой ветви), поэтому $n = 0{,}25$ — это именно отношение показания A_2 к показанию A_1, а не обратное.

Ответ. $x_1 = \dfrac{1-2n}{1+2n}\,2r = \dfrac{2}{3}\,r$ или $x_2 = \dfrac{1+2n}{1-2n}\,2r = 6r$.

Проверка. Подставим $x = \frac{2}{3}r$: ток через $2r$ равен $I \cdot \frac{2/3}{2+2/3} = \frac{I}{4}$, перетекает $\frac{I}{2} - \frac{I}{4} = \frac{I}{4} = 0{,}25\,I$ — верно; для $x = 6r$: $I \cdot \frac{6}{8} = \frac{3I}{4}$, перетекает $\frac{I}{4}$ — верно. Предел $n \to 0$: оба ответа стремятся к $2r$ — уравновешенный мост. Ответ безразмерно пропорционален r, как и должно быть.

Смысл: ток через средний амперметр показывает, насколько правая пара резисторов «несимметрична», а знак этой несимметрии амперметр без направления не различает.

Ответ. $x = \dfrac{2}{3}\,r$ или $x = 6r$.