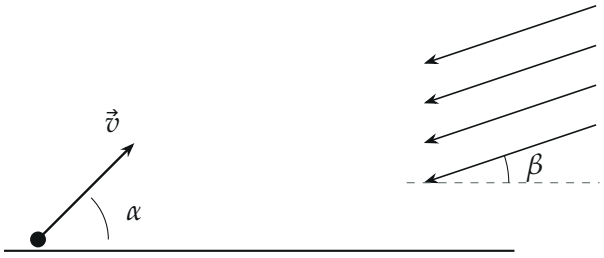
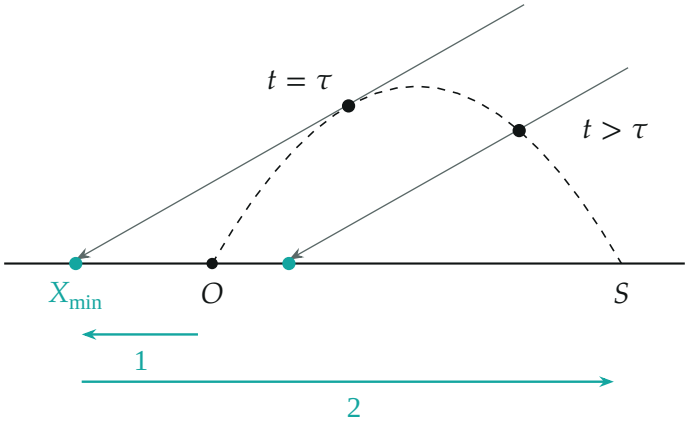
Тень брошенного тела

Задача 4. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 4] Тело бросают с поверхности земли под углом α к горизонту со скоростью v. Светит Солнце, и солнечные лучи падают под углом β к горизонту ($\beta < \alpha$), причем солнечные лучи лежат в плоскости траектории тела (см. рисунок). Какой путь пройдет тень от тела на земле к моменту его падения. Сопротивлением воздуха и угловыми размерами Солнца пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Тело летит по параболе, а его тень на земле — это точка, где луч, проходящий через тело, пересекает землю. Тело стартует круче (α), чем идут лучи ($\beta < \alpha$), поэтому в начале полёта тень бежит *назад*, против направления броска, потом останавливается, поворачивает и догоняет тело в точке падения. Путь тени — это не смещение: участок «назад» тень проходит дважды. Класс задачи — бросок под углом к горизонту в повёрнутых осях: если взять ось перпендикулярно лучам, движение тени сведётся к броску вертикально вверх.

Обозначения. O — точка броска, X — координата тени на земле (от O, вправо — в сторону броска), $X_{\min} < 0$ — самая левая точка тени, S — дальность полёта тела, ξ — ось, перпендикулярная лучам (вверх-влево), τ — момент, когда тень дальше всего слева.



Тень — пересечение луча, проходящего через тело, с землёй. Сначала тень бежит влево (1) до $X_{\min}$, затем вправо (2) до точки падения S

1. Где тень. Луч, проходящий через тело, идёт вниз-влево под углом β к горизонту. Если тело находится на высоте y над точкой с координатой x, луч опускается на y и при этом сдвигается влево на $y\operatorname{ctg}\beta$. Поэтому координата тени

$$X = x - y\operatorname{ctg}\beta.$$

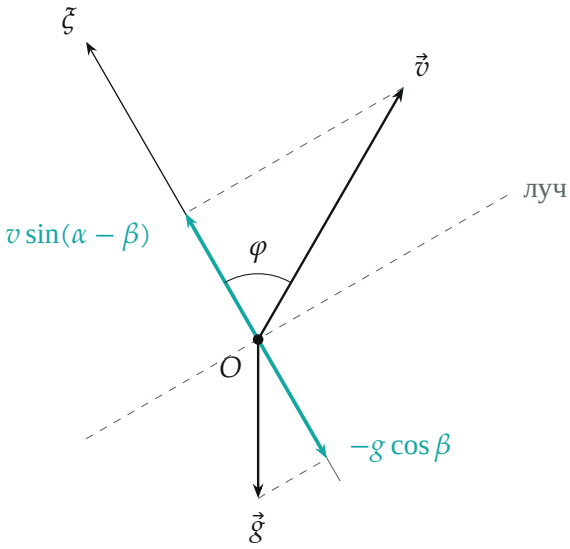
В начале полёта тело поднимается круче, чем идут лучи: за малое время оно сдвигается вправо на $\Delta x = v\cos\alpha\,\Delta t$ и вверх на $\Delta y = v\sin\alpha\,\Delta t$, а тень смещается на $\Delta X = v\Delta t(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{ctg}\beta)$. При $\alpha > \beta$ это отрицательно ($\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$): тень действительно стартует влево. В момент падения $y = 0$ и тень совпадает с телом: $X = S$. Значит, путь тени

$$L = 2|X_{\min}| + S.$$

2. Ось перпендикулярно лучам — и тень становится броском вверх. Проведём через O ось ξ перпендикулярно лучам, вверх-влево. Все точки одного луча имеют одну и ту же координату ξ; тень на земле в точке X имеет $\xi = -X\sin\beta$ (точка земли левее O лежит выше по оси). Поэтому координата тени

$$X = -\frac{\xi_{\text{тела}}}{\sin\beta},$$

и тень дальше всего слева ровно тогда, когда координата ξ тела максимальна.



Ось ξ перпендикулярна лучам. Проекции скорости и ускорения на неё — как у тела, брошенного вертикально вверх

3. Проекции на ось ξ. Ось ξ составляет с горизонтом угол $90^\circ + \beta$, вектор $\vec{v}$ — угол α; угол между ними $\varphi = 90^\circ - (\alpha - \beta)$. Вектор $\vec{g}$ направлен вниз, угол между ним и осью ξ равен $180^\circ - \beta$. Проекции:

$$v_\xi = v\cos\varphi = v\sin(\alpha-\beta) > 0, \qquad g_\xi = g\cos(180^\circ - \beta) = -g\cos\beta.$$

Вдоль ξ тело движется равноускоренно: сначала вверх по оси, потом назад — точно как камень, брошенный вертикально вверх со скоростью v_ξ при «ускорении свободного падения» $g\cos\beta$. Наибольшая координата — там, где v_ξ обнулилась; по формуле максимальной высоты $h_{\max} = v_0^2/(2g)$:

$$\xi_{\max} = \frac{v_\xi^2}{2|g_\xi|} = \frac{v^2\sin^2(\alpha-\beta)}{2g\cos\beta}, \qquad |X_{\min}| = \frac{\xi_{\max}}{\sin\beta} = \frac{v^2\sin^2(\alpha-\beta)}{2g\sin\beta\cos\beta}.$$

Этот момент наступает при $\tau = v_\xi/(g\cos\beta)$; он раньше падения $t_{\text{пол}} = 2v\sin\alpha/g$, потому что $\sin(\alpha-\beta) < \sin\alpha\cos\beta$. Тело к этому моменту ещё в воздухе — поворот тени действительно есть.

4. Дальность полёта тела. По оси y (вверх) тело летит время $t_{\text{пол}} = 2v\sin\alpha/g$, по оси x движется равномерно со скоростью $v\cos\alpha$:

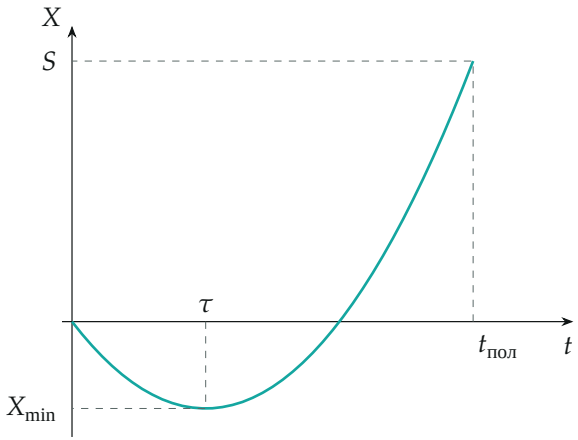
$$S = v\cos\alpha\cdot\frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

5. Путь тени.

$$L = 2|X_{\min}| + S = \frac{v^2\sin^2(\alpha-\beta)}{g\sin\beta\cos\beta} + \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Раскроем $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ и возведём в квадрат; удвоенное произведение $-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$, делённое на $\sin\beta\cos\beta$, сократится с $2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$L = \frac{v^2}{g}\left(\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\beta + \cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta\right).$$



Координата тени от времени при $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ (построено по формуле $X = x - y\operatorname{ctg}\beta$): спуск до $X_{\min}$ в момент $\tau = t_{пол}/3$, затем подъём до S

Обратите внимание. Спрашивают путь, а не перемещение тени. Перемещение равно дальности S; путь больше на $2|X_{\min}|$ — участок «назад» тень пробегает туда и обратно.

Проверка. Размерность: v^2/g — длина. Предел $\beta \to \alpha$: лучи идут параллельно начальной скорости, тень не уходит назад; формула даёт $\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то есть $L = S$ — верно. Предел $\beta \to 0$ (Солнце у горизонта): тень убегает бесконечно далеко, $L \to \infty$ — тоже верно. Численно при $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$: прямой расчёт $X(t)$ на python даёт $|X_{\min}| = 0{,}289\,v^2/g$, $S = 0{,}866\,v^2/g$, $L = 1{,}443\,v^2/g$, и формула ответа — $0{,}75 \cdot 1{,}732 + 0{,}25 \cdot 0{,}577 = 1{,}443$. Совпало.

Смысл: в осях, привязанных к лучам, тень — это проекция тела, и задача о тени превращается в знакомый бросок вертикально вверх.

Ответ. Путь тени

$$L = \frac{v^2}{g}\left(\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\beta + \cos^2\alpha \operatorname{tg}\beta\right) = \frac{v^2\sin^2(\alpha-\beta)}{g\sin\beta\cos\beta} + \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$