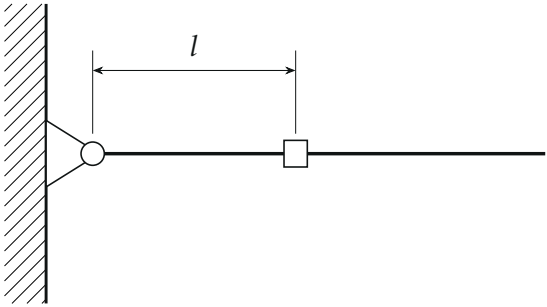
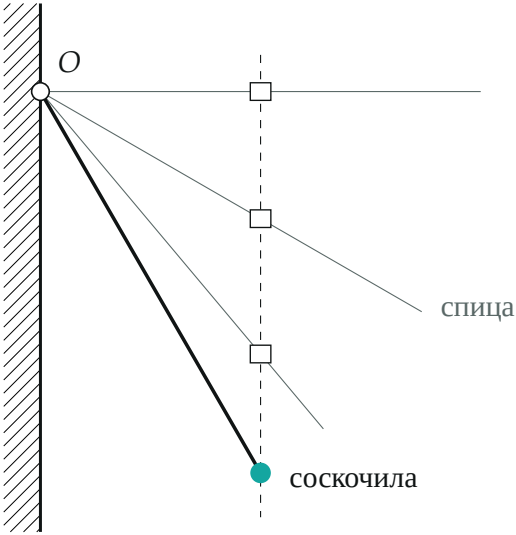
Муфта на спице

Задача 5. [Росатом 2020/21, заключительный этап, 9 класс, задача 5] Невесомую жесткую спицу длиной L прикрепили шарнирно одним концом к вертикальной стенке и удерживают горизонтально. На спицу надели маленькую массивную муфту и расположили на расстоянии $l = L/2$ от шарнира (см. рисунок). В некоторый момент времени спицу отпускают. Какую скорость будет иметь конец спицы в тот момент, когда муфта соскочит со спицы? Трение между спицей и муфтой, а также трение в шарнире отсутствует.



▲ **Решение. Что происходит.** Главное — спица невесома. На невесомое тело сумма моментов сил относительно шарнира обязана быть равна нулю: иначе у тела без массы появилось бы бесконечное угловое ускорение. Сила тяжести на спицу не действует, трения в шарнире нет, значит, и муфта не может давить на спицу поперёк неё (вдоль спицы муфта давить не может — трения нет). По третьему закону Ньютона спица тоже не действует на муфту. Муфта *свободно падает* вертикально вниз, а спица лишь поворачивается так, чтобы проходить через муфту, надетую на неё. Муфта соскочит, когда окажется на конце спицы. Класс задачи — кинематика связи: свободное падение плюс вращение спицы.

Обозначения. O — шарнир, α — угол спицы с горизонталью, h — высота, на которую опустится муфта к моменту соскальзывания, $\vec{v}$ — скорость муфты в этот момент, ω — угловая скорость спицы, v_c — скорость конца спицы.



Муфта (квадратики) падает по вертикали, спица поворачивается вслед за ней. Муфта соскакивает, когда оказывается на конце спицы

1. Почему муфта падает свободно. Запишем условие для невесомой спицы: момент сил относительно шарнира O равен нулю (у тела без массы момент инерции нулевой, и ненулевой момент дал бы бесконечное угловое ускорение). На спицу действуют сила реакции шарнира (её плечо равно нулю) и сила $\vec{N}$ со стороны муфты, перпендикулярная спице (трения нет). Плечо силы $\vec{N}$ — расстояние от шарнира до муфты, оно не равно нулю, поэтому $N = 0$. Тогда и на муфту со стороны спицы ничего не действует: на неё действует только $m\vec{g}$, она падает с ускорением g вертикально, с нулевой начальной скоростью.

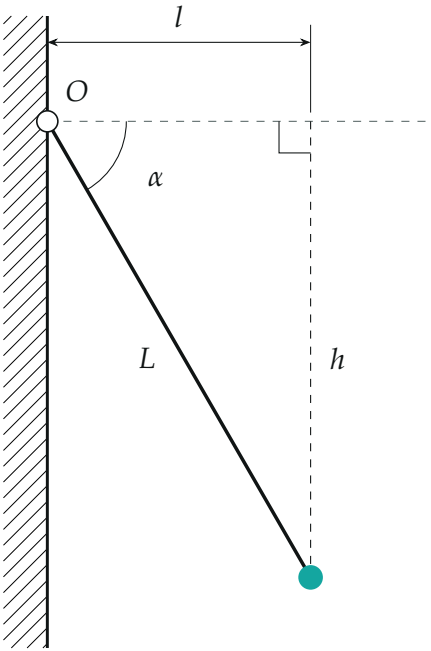
2. Когда муфта соскочит. Муфта всё время на вертикали, проходящей на расстоянии l от стенки. Спица проходит через муфту, поэтому расстояние от шарнира до муфты равно $l/\cos\alpha$; оно растёт по мере поворота спицы. Муфта соскакивает, когда это расстояние становится равным длине спицы L:

$$\cos\alpha = \frac{l}{L} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 60^\circ.$$

Высота, на которую опустилась муфта, — вертикальный катет прямо-

угольного треугольника с гипотенузой L:

$$h = L\sin\alpha = \sqrt{L^2 - l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$



Момент соскальзывания: муфта на конце спицы, $\cos\alpha = l/L$

3. Скорость муфты. Закон сохранения механической энергии для муфты (на неё действует только сила тяжести):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L} = \sqrt{\sqrt{3}\,gL}.$$

Скорость направлена вертикально вниз.

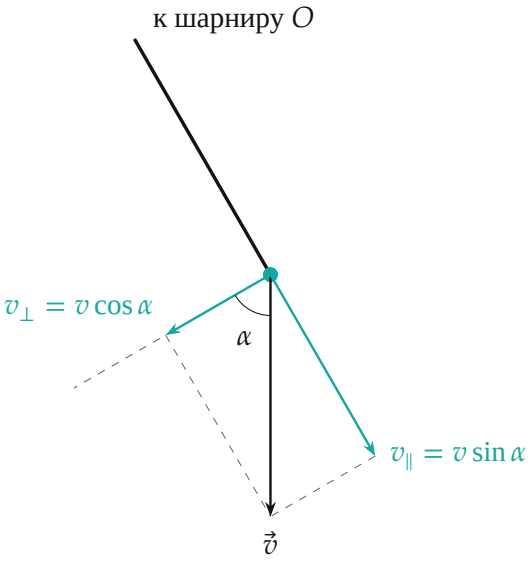
4. Скорость конца спицы. Спица жёсткая и вращается вокруг O; скорость каждой её точки перпендикулярна спице и равна ωr. Муфта может скользить вдоль спицы, но поперёк спицы она движется вместе с

ней (спица проходит сквозь муфту). Поэтому разложим $\vec{v}$ на две составляющие: вдоль спицы (это скольжение) и поперёк спицы — она равна скорости точки спицы, где сейчас муфта. Вертикаль составляет с перпендикуляром к спице угол α:

$$v_\perp = v\cos\alpha.$$

Муфта в этот момент на самом конце спицы, на расстоянии L от шарнира, поэтому

$$v_c = \omega L = v_\perp = v\cos\alpha = \frac{l}{L}\sqrt{2g\sqrt{L^2 - l^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}\,gL}.$$



Скорость муфты в момент соскальзывания: составляющая поперёк спицы равна скорости конца спицы

Обратите внимание. Энергия муфты не делится со спицей: спица невесома и работы над муфтой не совершает. Поэтому $v = \sqrt{2gh}$, как у свободно падающего тела, — без «раскручивания» спицы.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — скорость. Второй способ — через угол: муфта на вертикали $x = l$, её высота $y = -l\,\mathrm{tg}\,\alpha$; продифференцируем по времени: $v = l\dot{\alpha}/\cos^2\alpha$, откуда $\omega = \dot{\alpha} = v\cos^2\alpha/l$ и $v_c = \omega L = vL\cos^2\alpha/l$. При $\cos\alpha = l/L$ это $v\cos\alpha$ — совпало. Численно: $v_c = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}732\,gL} \approx 0{,}66\sqrt{gL}$.

Смысл: невесомая спица ничего не решает сама — она лишь «показывает» на свободно падающую муфту, и её конец движется со скоростью поперечной составляющей скорости муфты.

Ответ. $v_c = \dfrac{l}{L}\sqrt{2g\sqrt{L^2 - l^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}\,gL} \approx 0{,}66\sqrt{gL}$.