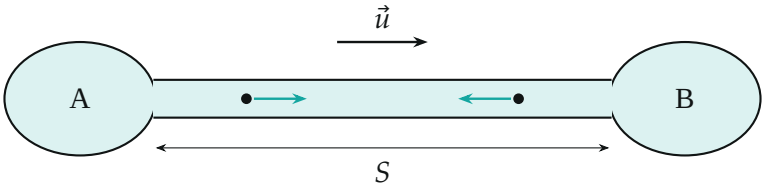
Лягушки в протоке

Задача 1. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Болота A и B связаны протокой. Вода в протоке течёт из A в B со скоростью u. В болотах живут две разные популяции лягушек, которые в какой-то момент решили поменяться болотами («везде хорошо, где нас нет!»). Для этого через интервалы времени Δt одновременно из A в B и из B в A отправляются в путешествие по одной лягушке соответствующих популяций. Скорость всех лягушек относительно воды постоянна и равна $v = 4u$. Сколько лягушек встречает на своём пути любая лягушка, плывущая из A в B? Длина протоки S.



Поясняющий рисунок: течение из A в B, лягушки плывут навстречу друг другу.

▲ **Решение. Что происходит.** Лягушки плывут навстречу друг другу по одной протоке, течение помогает тем, кто плывёт из A, и мешает тем, кто плывёт из B. Наша лягушка встретит каждую лягушку из B, которая находится в протоке в момент нашего старта, и каждую, которая стартует из B до того, как наша доберётся до B. Значит, надо понять, в каком промежутке времени должна стартовать лягушка из B, и сосчитать моменты старта в этом промежутке. Класс задачи — сложение скоростей (переход в систему отсчёта берега) + счёт событий на оси времени.

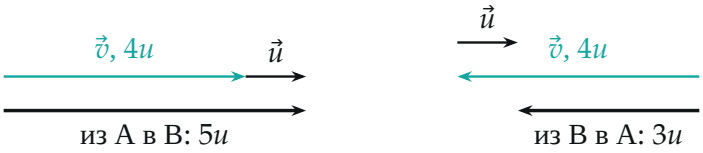
Обозначения. Ось x направлена вдоль протоки от A к B. t_1 — время пути лягушки из B в A, t_2 — из A в B. Наша лягушка стартует из A в момент $t = 0$; лягушки из B стартуют в моменты $k\,\Delta t$, k — целое (старты одновременные, так что $k = 0$ — лягушка, стартовавшая вместе с нашей).

1. Скорости относительно берега. Закон сложения скоростей: скорость лягушки относительно берега равна её скорости относительно воды плюс скорость воды. В проекции на ось x:

$$\text{из A в B: } v + u = 5u, \qquad \text{из B в A: } -(v - u) = -3u.$$

Время пути по протоке длины S:

$$t_2 = \frac{S}{v+u} = \frac{S}{5u}, \qquad t_1 = \frac{S}{v-u} = \frac{S}{3u}.$$



Сложение скоростей относительно берега (в масштабе): по течению $4u + u = 5u$, против течения $4u - u = 3u$.

2. Кого встретит наша лягушка. Лягушка из B, стартовавшая в момент $k\,\Delta t$, находится в протоке в промежутке времени от $k\,\Delta t$ до $k\,\Delta t + t_1$, наша — от 0 до t_2. Они плывут навстречу по одной прямой, поэтому встречаются тогда и только тогда, когда эти промежутки перекрываются: лягушка из B ещё не доплыла до A к нашему старту ($k\,\Delta t + t_1 > 0$) и уже стартовала до нашего прибытия в B ($k\,\Delta t < t_2$):

$$-t_1 < k\,\Delta t < t_2.$$

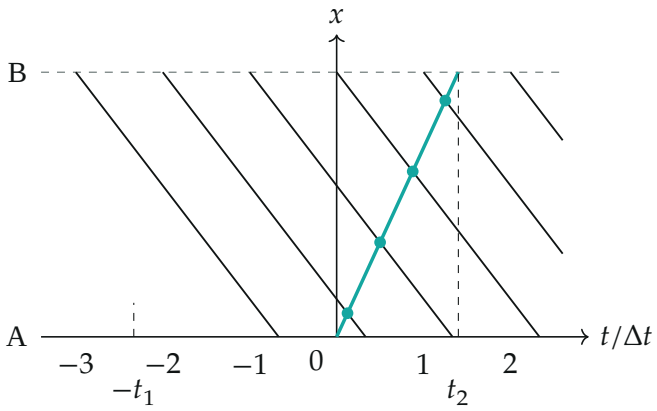
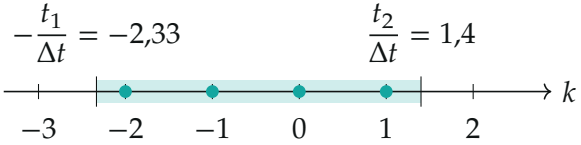


График $x(t)$ для $S = 7u\,\Delta t$ (по формулам): наша лягушка — бирюзовая прямая наклона $5u$, лягушки из B — чёрные прямые наклона $-3u$, стартующие через Δt. Встреч четыре (точки) — с лягушками $k = -2, -1, 0, 1$; лягушка $k = -3$ уже доплыла до A, $k = 2$ стартует после нашего прибытия.

3. Сколько таких лягушек. Подходят целые k из промежутка $-t_1/\Delta t < k < t_2/\Delta t$. Неположительных k ($k = 0, -1, \dots$) — столько, сколько целых $|k| < t_1/\Delta t$, то есть $[t_1/\Delta t] + 1$; положительных — $[t_2/\Delta t]$ (квадратные скобки — целая часть; дроби считаем нецелыми — иначе встреча приходится ровно на момент старта или прибытия). Всего

$$N = \left[\frac{t_1}{\Delta t}\right] + \left[\frac{t_2}{\Delta t}\right] + 1 = \left[\frac{S}{3u\,\Delta t}\right] + \left[\frac{S}{5u\,\Delta t}\right] + 1.$$



Тот же пример на оси номеров старта: длина промежутка $(t_1 + t_2)/\Delta t = 3{,}73$, а целых точек в нём 4 — промежуток начинается не в целой точке, и считать надо по обе стороны от нуля.

Обратите внимание. Длина промежутка $(t_1 + t_2)/\Delta t = 8S/(15u\,\Delta t)$ ещё не даёт числа встреч: внутри промежутка длины 3,73 может оказаться и 3, и 4 целые точки. Поскольку старты синхронны, ноль — всегда

внутри, и считать надо отдельно влево и вправо от него. У организаторов в ответе $[8S/(15u\,\Delta t)]$ — для примера на рисунке это 3 вместо 4 (верно примерно в половине случаев).

Ответ: $N = \left[\dfrac{S}{3u\,\Delta t}\right] + \left[\dfrac{S}{5u\,\Delta t}\right] + 1$ (квадратные скобки — целая часть); это $[8S/(15u\,\Delta t)]$ или на одну больше.

Проверка. Размерность: $S/(u\,\Delta t)$ — безразмерно. Предел $\Delta t \to$ большое ($S \ll u\,\Delta t$): обе целые части нули, $N = 1$ — наша лягушка встречает только ту, что стартовала из B одновременно с ней, верно. Моделирование на python (встреча — момент $t = (S + 3k\,u\Delta t)/(8u)$ внутри обоих промежутков) для 2000 случайных $S/(u\,\Delta t)$ совпало с формулой во всех случаях. Здесь считается установившийся обмен: первые лягушки из A, стартовавшие в самом начале, встретят меньше — лягушек из B, стартовавших «раньше начала», нет.

Смысл: лягушка из A встречает тех, кто уже в протоке (их задаёт медленный путь против течения), и тех, кто успеет стартовать за её быстрый путь, плюс напарницу, стартовавшую одновременно.

Ответ. $N = \left[\dfrac{S}{3u\,\Delta t}\right] + \left[\dfrac{S}{5u\,\Delta t}\right] + 1$ (целые части); это $\left[\dfrac{8S}{15u\,\Delta t}\right]$ или на единицу больше.