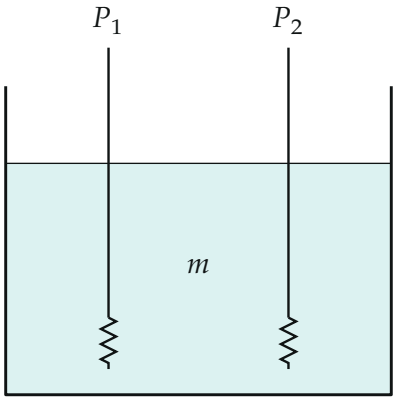
Два нагревателя

Задача 3. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Для нагревания на ΔT некоторого объёма воды первым нагревателем необходимо время $t_1 = 5$ мин, а для нагревания этого объёма на $2\Delta T$ вторым нагревателем необходимо время $t_2 = 6$ мин. За какое время этот объём воды нагреют на $3\Delta T$ оба нагревателя вместе? Потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: одна и та же вода, два нагревателя мощностей P_1 и P_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Потерь нет, поэтому вся теплота от нагревателей идёт на нагревание воды, а теплота пропорциональна изменению температуры: $Q = cm\,\Delta T$. Из двух опытов найдём мощности нагревателей (в долях от «теплоты на ΔT»), при совместной работе мощности складываются. Класс задачи — уравнение теплового баланса.

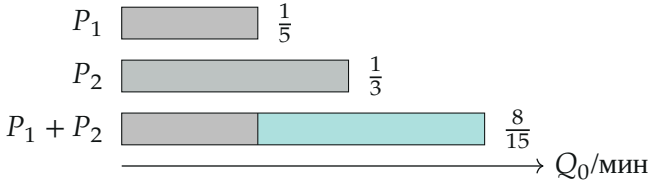
Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды, m — её масса; $Q_0 = cm\,\Delta T$ — теплота на нагрев на ΔT; P_1, P_2 — мощности нагревателей (постоянны); t — искомое время.

1. Мощности нагревателей. Уравнение теплового баланса для каж-

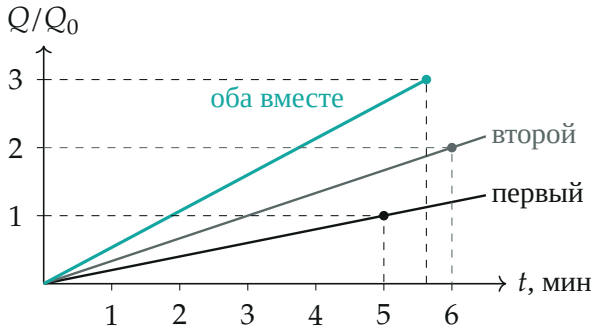
дого опыта: теплота от нагревателя равна теплоте, полученной водой.

$$P_1 t_1 = cm\,\Delta T = Q_0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{Q_0}{t_1},$$
$$P_2 t_2 = cm \cdot 2\Delta T = 2Q_0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{2Q_0}{t_2}.$$

Численно: первый даёт Q_0 за 5 мин, второй — Q_0 за 3 мин, второй мощнее.



Мощности в долях Q_0 за минуту (в масштабе): $P_1 = \frac{1}{5}$, $P_2 = \frac{1}{3}$, вместе $\frac{8}{15}$.



Полученная водой теплота во времени (по формулам): точки — данные опыты (Q_0 за 5 мин, $2Q_0$ за 6 мин) и ответ ($3Q_0$ за 5,6 мин); наклоны прямых — мощности, наклон «оба вместе» — их сумма.

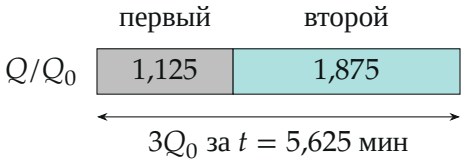
2. Оба нагревателя вместе. Мощности складываются (каждый нагреватель отдаёт свою теплоту независимо). Уравнение теплового баланса для нагрева на $3\Delta T$:

$$(P_1 + P_2)\,t = cm \cdot 3\Delta T = 3Q_0 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{Q_0}{t_1} + \frac{2Q_0}{t_2}\Big)t = 3Q_0,$$

$$t = \frac{3t_1t_2}{t_2 + 2t_1}.$$

Численно:

$$t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{6 + 2 \cdot 5}\ \text{мин} = \frac{90}{16}\ \text{мин} = 5{,}625\ \text{мин} \approx 5{,}6\ \text{мин}.$$



Кто сколько тепла дал за $t = 5{,}625$ мин: первый $5{,}625/5 = 1{,}125\,Q_0$, второй $5{,}625/3 = 1{,}875\,Q_0$, вместе $3Q_0$.

Обратите внимание. Складываются мощности, а не времена: нельзя «сложить» 5 и 6 минут или усреднить их — второй нагреватель в опыте грел на $2\Delta T$, и в пересчёте на ΔT ему нужно 3 мин.

Ответ: $t = \dfrac{3t_1t_2}{t_2 + 2t_1} = 5{,}625$ мин $\approx 5{,}6$ мин.

Проверка. Размерность: мин·мин/мин — минуты. Второй способ — «скорости нагрева»: первый греет на $\Delta T/5$ в минуту, второй — на $2\Delta T/6 = \Delta T/3$ в минуту, вместе на $8\Delta T/15$ в минуту; $3\Delta T$ — за $3 \cdot 15/8 = 5{,}625$ мин. Оценка: один второй нагрел бы на $3\Delta T$ за 9 мин, два одинаковых вторых — за 4,5 мин; первый слабее второго, поэтому ответ между 4,5 и 9 мин — верно.

Смысл: при совместной работе тепловые мощности складываются, и время обратно пропорционально суммарной мощности.

Ответ. $t = \dfrac{3t_1t_2}{t_2 + 2t_1} \approx 5{,}6$ мин.