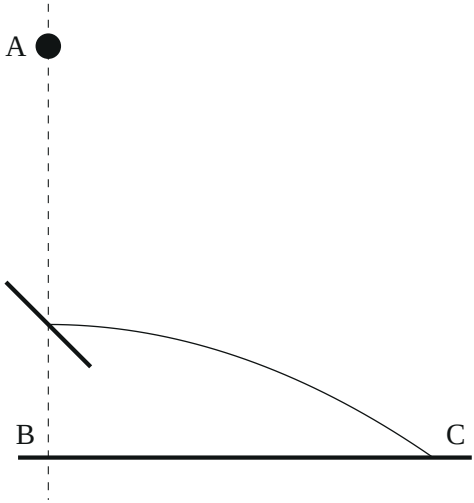
# Дощечка под падающим телом

**Задача 4.** [Росатом 2021/22, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Тело падает с высоты $H$ на землю без начальной скорости из точки A. На некоторой высоте $h$ от поверхности земли закрепляют дощечку, ориентированную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. При падении тело испытывает абсолютно упругий удар о дощечку и падает на землю в точке C (см. рисунок). При какой высоте $h$ расстояние BC будет максимальным? Ответ обосновать. Найти это максимальное расстояние.



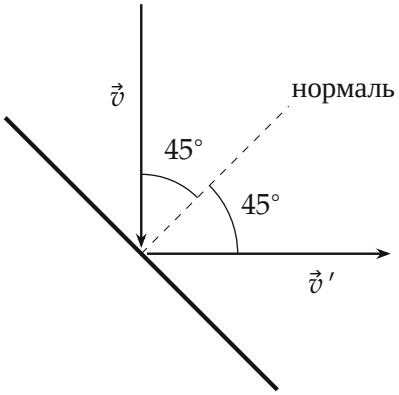

▲ **Решение.** **Что происходит.** До дощечки тело свободно падает и набирает скорость. Удар абсолютно упругий о неподвижную дощечку под 45°: скорость сохраняет модуль и отражается, как свет от зеркала, — вертикальная скорость превращается в горизонтальную. После удара тело летит, как брошенное горизонтально с высоты $h$. Чем ниже дощечка, тем больше скорость после удара, но тем меньше времени до земли, — отсюда максимум. Класс задачи — свободное падение, упругий удар, бросок горизонтально + поиск экстремума.

**Обозначения.** $v$ — скорость тела перед ударом (и после него), $t$ — время полёта от дощечки до земли, $s = BC$. Ось $x$ — горизонтально от B к C, ось $y$ — вертикально вверх.

**1. Скорость перед ударом.** Закон сохранения механической энергии при свободном падении с высоты $H$ до высоты $h$ (сопротивления нет):

$$mg\,(H-h)=\frac{mv^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2g\,(H-h)}.$$

**2. Удар о дощечку.** При абсолютно упругом ударе о неподвижную гладкую дощечку составляющая скорости вдоль дощечки сохраняется, а составляющая по нормали меняет знак — угол падения равен углу отражения. Скорость $\vec{v}$ направлена вниз, нормаль к дощечке — под 45° к вертикали, поэтому отражённая скорость повёрнута на $2\cdot 45^\circ = 90^\circ$: она горизонтальна и по модулю равна $v$.

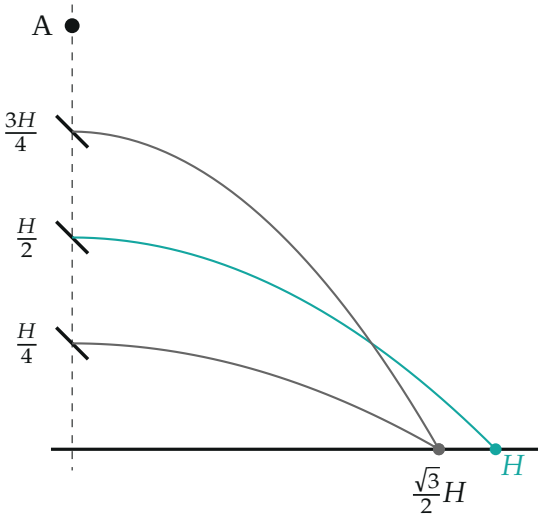



*Удар о дощечку: вертикальная скорость $\vec{v}$ составляет 45° с нормалью, отражённая $\vec{v}\,'$ — тоже 45° по другую сторону, то есть горизонтальна; $|\vec{v}\,'|=|\vec{v}|$.*

**3. Полёт после удара.** Бросок горизонтально с высоты $h$ со скоростью $v$. По вертикали — свободное падение без начальной вертикальной скорости, по горизонтали — равномерное движение:

$$h=\frac{gt^2}{2}\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

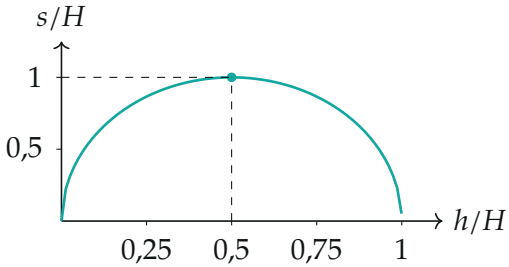
$$s=vt=\sqrt{2g\,(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{h\,(H-h)}.$$




*Траектории после удара (по формуле $y = h - x^2/(4(H-h))$) для $h = H/4$, $H/2$, $3H/4$: крайние дают одно и то же $s = \frac{\sqrt{3}}{2}H$, дальше всех — при $h = H/2$, $s = H$.*

**4. Максимум.** Под корнем — произведение двух множителей $h$ и $H-h$ с постоянной суммой $H$. Такое произведение — парабола ветвями вниз с нулями в $h = 0$ и $h = H$, её вершина посередине:

$$h = \frac{H}{2}, \qquad s_{\max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\cdot\frac{H}{2}} = H.$$




*Дальность $s(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$ (по формуле): нули при $h = 0$ и $h = H$, единственный максимум $s = H$ при $h = H/2$; в осях $h/H$, $s/H$ кривая — половина эллипса.*

**Обратите внимание.** Удар упругий и дощечка под 45° — только поэтому после удара скорость горизонтальна и равна $v$. Без этого полёт начался бы с вертикальной составляющей скорости, и формула $t = \sqrt{2h/g}$ не работала бы.

**Ответ:** $h = \dfrac{H}{2}$, $\quad BC_{\max} = 2\sqrt{\dfrac{H}{2}\cdot\dfrac{H}{2}} = H$.

**Проверка.** Размерность: $\sqrt{h(H-h)}$ — метры. Пределы: $h \to H$ — скорость перед ударом нулевая, $s \to 0$; $h \to 0$ — нет времени на полёт, $s \to 0$; оба верны. Второй способ — неравенство о средних: $\sqrt{h\,(H-h)} \le \dfrac{h+(H-h)}{2} = \dfrac{H}{2}$, равенство при $h = H - h$, то есть $s \le H$ при $h = H/2$ — то же.

Смысл: высоту $H$ выгодно поделить поровну — половина на разгон, половина на полёт; тогда тело улетает по горизонтали ровно на $H$.

**Ответ.** $h = H/2$; $\quad BC_{\max} = H$.