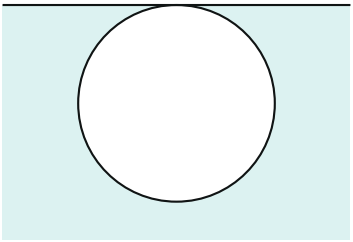
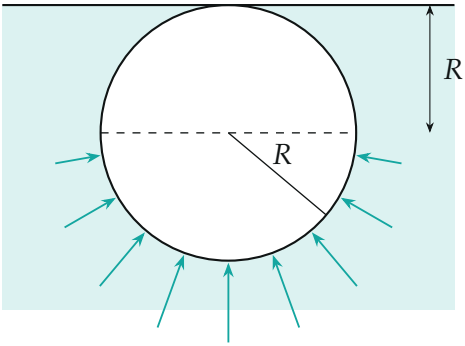
Шар касается поверхности воды

Задача 5. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Шар радиуса R плавает в воде, касаясь одной своей точкой её поверхности (см. рисунок). Найти силу, с которой вода действует на нижнюю половину шара. Плотность воды ρ.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода давит на каждый элемент поверхности шара перпендикулярно ему, давление растёт с глубиной. Сложить эти силы по нижней полусфере напрямую трудно: у элементов разные глубины и разные направления. Поэтому применим приём «дополнить тело»: нижнюю полусферу закроем плоским кругом и получим полушар. Сумма сил давления на всю поверхность любого погружённого тела — сила Архимеда, а сила на плоский круг считается сразу (давление на нём одно). Класс задачи — гидростатика: давление $\rho g h$ и закон Архимеда.

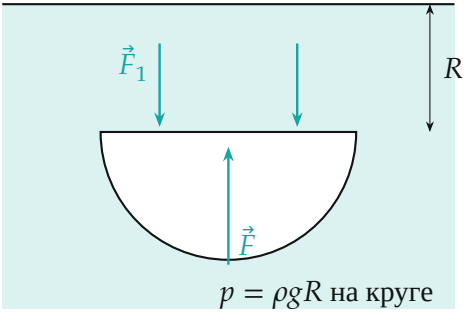
Обозначения. Ось y — вертикально вверх. F — искомая сила воды на нижнюю полусферу; F_1 — сила давления воды на плоский круг, закрывающий полушар сверху; F_A — сила Архимеда на полушар; $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ — объём полушара. Атмосферное давление не учитываем: оно давит на замкнутую поверхность одинаково со всех сторон и в сумме даёт ноль (как и в законе Архимеда).



Силы давления на нижнюю полусферу (длины — по формуле $\rho g\,(R - R\sin\varphi)$, φ — угол точки от горизонтали): все направлены внутрь шара, чем глубже, тем больше. Сложить их напрямую — трудно.

1. Полушар и сила Архимеда. Представим в воде полушар — нижнюю половину нашего шара, закрытую сверху плоским кругом радиуса R на глубине R. Вода действует на него так же, как на нижнюю половину шара: давление в каждой точке задаёт только глубина, а форма и положение нижней поверхности те же. Закон Архимеда: равнодействующая сил давления воды на всю поверхность полушара направлена вверх и равна

$$F_{\text{A}} = \rho g V = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g.$$



Полушар в воде: на плоский круг вода давит вниз силой $\vec{F}_1$ (давление на круге всюду $\rho g R$), на нижнюю полусферу — искомой силой $\vec{F}$.

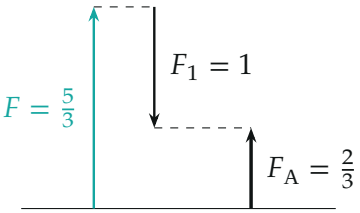
2. Сила на плоский круг. Круг горизонтален и весь находится на глубине R, давление на нём всюду $p = \rho g R$, сила направлена вниз (вода над кругом):

$$F_1 = p \cdot \pi R^2 = \rho g R \cdot \pi R^2 = \pi R^3 \rho g.$$

3. Искомая сила. Сила Архимеда — сумма сил давления на обе части поверхности полушара. Проекция на ось y (у сил на полусферу горизонтальные составляющие компенсируются по симметрии, так что $\vec{F}$ вертикальна):

$$F_\text{A} = F - F_1 \quad \Rightarrow \quad F = F_\text{A} + F_1 = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g + \pi R^3 \rho g = \frac{5}{3}\pi R^3 \rho g.$$

$F > 0$ — сила направлена вверх.



Баланс сил на полушар в единицах $\pi R^3 \rho g$ (в масштабе): вверх $F = \frac{5}{3}$, вниз $F_1 = 1$, в сумме сила Архимеда $\frac{2}{3}$ вверх.

Обратите внимание. Ответ не равен «половине силы Архимеда шара» ($\frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$): нижняя полусфера глубже верхней, давление на неё больше, а вертикальные составляющие сил на верхнюю половину направлены вниз.

Ответ: $F = \dfrac{2}{3}\pi R^3 \rho g + \pi R^3 \rho g = \dfrac{5}{3}\pi R^3 \rho g$, направлена вверх.

Проверка. Размерность: $\text{м}^3 \cdot \text{кг}/\text{м}^3 \cdot \text{м}/\text{с}^2$ — ньютон. Второй способ — через верхнюю половину. Вертикальная сила на верхнюю полусферу равна весу воды в «столбе» над ней, то есть объёма цилиндра $\pi R^2 \cdot R$ без полушара: $(\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3)\rho g = \frac{1}{3}\pi R^3 \rho g$ вниз. Сила на весь шар — архимедова, $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ вверх, значит, на нижнюю половину $\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ (в единицах $\pi R^3 \rho g$) — то же. Численно (python, интеграл давления по нижней полусфере) — $5{,}236 = \frac{5}{3}\pi$ в единицах $R^3 \rho g$.

Смысл: на нижнюю половину вода давит снизу сильнее, чем держит весь шар; лишнее компенсирует давление на верхнюю половину, направленное вниз.

Ответ. $F = \frac{5}{3}\pi R^3 \rho g$, направлена вверх.