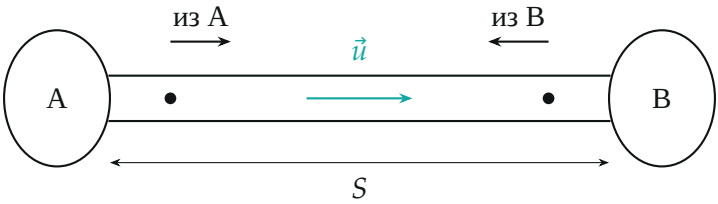
Лягушки в протоке

Задача 1. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 11 класс, задача 1] Болота A и B связаны протокой. Вода в протоке течёт из A в B со скоростью u. В болотах живут две разные популяции лягушек, которые в какой-то момент решили поменяться болотами («везде хорошо, где нас нет!»). Для этого через интервалы времени Δt одновременно из A в B и из B в A отправляются в путешествие по одной лягушке соответствующих популяций. Скорость всех лягушек относительно воды постоянна и равна $v = 4u$. Сколько лягушек встречает на своём пути любая лягушка, плывущая из A в B? Длина протоки S.



Поясняющий рисунок: протока длиной S между болотами, течение $\vec{u}$ из A в B; лягушки плывут навстречу друг другу

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение скоростей и счёт событий во времени. Скорость лягушки относительно берега — её скорость относительно воды плюс скорость воды. Лягушка из A плывёт по течению и проходит протоку быстро, лягушки из B — против течения, медленно. Наша лягушка встречает каждую лягушку из B, которая находится в протоке в какой-то момент её пути и ещё не разминулась с ней. Нужно понять, какие по счёту лягушки из B это будут, — то есть в какой промежуток времени они должны стартовать. Удобнее всего это видно на графике $x(t)$.

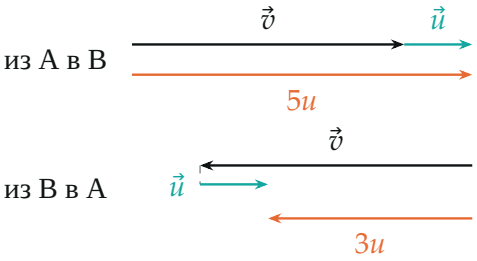
Обозначения. Ось x — вдоль протоки от A к B, начало в A. Наша лягушка стартует из A в момент $t = 0$; в этот же момент (старты одновременные) из B стартует лягушка с номером $k = 0$, лягушка k стартует в момент $k\Delta t$ (k — целое, может быть отрицательным). t_1 — время пути из B в A, t_2 — из A в B.

1. Скорости относительно берега. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_{\text{берег}} = \vec{v}_{\text{вода}} + \vec{u}$. В проекции на ось x:

$$\text{из А в В: } v + u = 5u, \qquad \text{из В в А: } -(v-u) = -3u.$$

Времена переходов:

$$t_2 = \frac{S}{v+u} = \frac{S}{5u}, \qquad t_1 = \frac{S}{v-u} = \frac{S}{3u}.$$



Сложение скоростей в единицах u: по течению $4+1=5$, против течения $4-1=3$ (оранжевые — скорости относительно берега)

2. Кого встретит наша лягушка. Наша лягушка в протоке с момента 0 до момента t_2. Лягушка k из В — с момента $k\Delta t$ до $k\Delta t + t_1$. Координаты:

$$x_0(t) = 5u\,t, \qquad x_k(t) = S - 3u\,(t - k\Delta t).$$

Встреча — равенство координат: $5ut = S - 3ut + 3uk\Delta t$, откуда момент встречи

$$t_k = \frac{S + 3uk\Delta t}{8u}.$$

Встреча действительно произошла в протоке, если $0 \le t_k \le t_2$:

$$S + 3uk\Delta t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad k \ge -\frac{S}{3u\Delta t} = -\frac{t_1}{\Delta t},$$
$$S + 3uk\Delta t \le \frac{8S}{5} \quad \Rightarrow \quad k \le \frac{S}{5u\Delta t} = \frac{t_2}{\Delta t}.$$

Смысл этих условий простой: лягушка $k < 0$ стартовала раньше и должна быть ещё в пути в момент нашего старта ($|k|\Delta t \le t_1$); лягушка $k > 0$ стартует позже и должна успеть выйти до того, как наша доплывёт до B ($k\Delta t \le t_2$). То есть стартовать лягушки из B должны в промежутке $[-t_1;\, t_2]$ длины $t_1 + t_2 = \frac{8S}{15u}$.

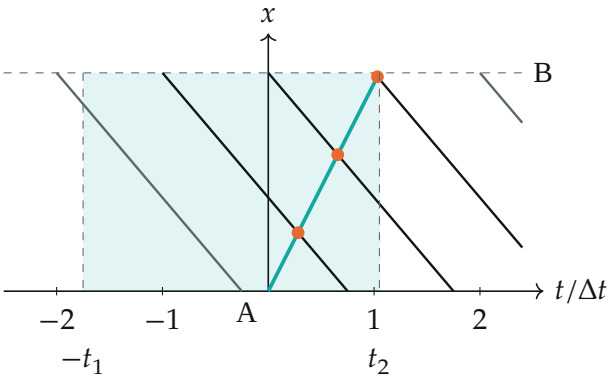
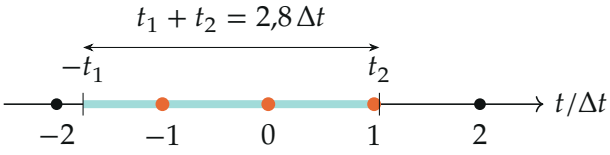


График $x(t)$ для $S = 5{,}25\,u\Delta t$: наша лягушка — бирюзовая, лягушки из B — чёрные (серые не встречаются с нашей). Встреча — пересечение линий (оранжевые точки); встречаются те, кто стартовал из B в закрашенном промежутке $[-t_1;\, t_2]$: здесь $k = -1, 0, 1$ — три лягушки

3. Подсчёт. Целые k от $-\left[\frac{t_1}{\Delta t}\right]$ до $\left[\frac{t_2}{\Delta t}\right]$ включительно, вместе с $k = 0$ (лягушка, стартовавшая из B одновременно с нашей; с ней встреча в момент $\frac{S}{8u}$, в середине пути). Их число

$$N = \left[\frac{t_1}{\Delta t}\right] + \left[\frac{t_2}{\Delta t}\right] + 1 = \left[\frac{S}{3u\Delta t}\right] + \left[\frac{S}{5u\Delta t}\right] + 1$$

(квадратные скобки — целая часть числа). Если $t_1/\Delta t$ или $t_2/\Delta t$ — целое число, крайняя «встреча» происходит прямо у болота, в момент чужого прибытия или нашего; мы её засчитали.



Моменты стартов из B (точки) и промежуток $[-t_1;\, t_2]$ длиной $2{,}8\,\Delta t$: в него попадают три старта (оранжевые), а не $[2{,}8] = 2$

4. Сравнение с ответом организаторов. У организаторов $N = \left[\frac{8S}{15u\Delta t}\right]$: они берут целую часть длины промежутка $t_1 + t_2$, хотя один старт (в момент 0) всегда внутри, поэтому их ответ бывает на одну лягушку меньше (при $S = 5{,}25\,u\Delta t$ встреч три, а $[2{,}8] = 2$); при $S \gg u\Delta t$ обе формулы дают $N \approx \frac{8S}{15u\Delta t}$.

Обратите внимание: лягушки из B, стартовавшие *до* нашей, тоже встречаются с ней — если ещё не доплыли до A. Поэтому промежуток стартов тянется в прошлое на t_1, а не только вперёд на t_2.

Проверка. Размерность: $\frac{S}{u\Delta t}$ — безразмерное число. Предельные случаи: если Δt больше и t_1, и t_2, то $N = 1$ — встречаем только ту, что вышла одновременно с нами, в момент $\frac{S}{8u}$, в точке $x = \frac{5S}{8}$ (лягушка по течению быстрее и проходит больше). Численная проверка (перебор k с условием $0 \le t_k \le t_2$ на python) для $S/(u\Delta t)$ от 0,1 до 30 совпала с формулой $\left[\frac{S}{3u\Delta t}\right] + \left[\frac{S}{5u\Delta t}\right] + 1$.

Смысл: встречи определяются не только длиной «окна» стартов, но и тем, что одна из встречных лягушек стартует одновременно с нашей.

Ответ. $N = \left[\dfrac{S}{3u\Delta t}\right] + \left[\dfrac{S}{5u\Delta t}\right] + 1$ (квадратные скобки — целая часть); при $S \gg u\Delta t$ это $N \approx \dfrac{8S}{15u\Delta t}$.