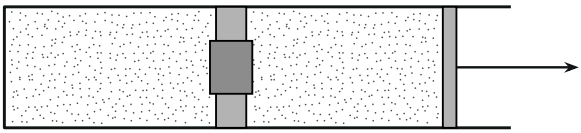
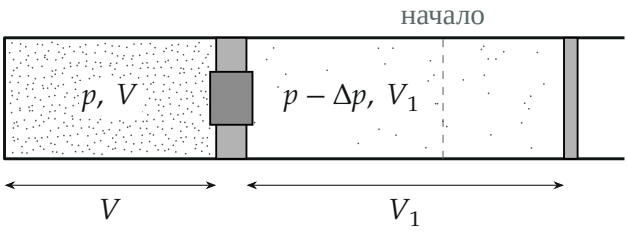
Цилиндр с пробкой и поршнем

Задача 3. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Цилиндр разделён на два равных отсека перегородкой с отверстием, закрытым пробкой. В обоих отсеках содержится идеальный газ под давлением p. Пробка вылетает при перепаде давлений Δp. С одного конца цилиндр запаян, с другого — закрыт поршнем. Поршень медленно вытягивают, пока пробка не вылетит, затем вытягивание прекращают. Найти установившееся давление. Температура постоянна.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока пробка держит, газ в двух отсеках изолирован. Левый отсек (запаянный) не меняется: в нём всё время давление p. Газ правого отсека расширяется медленно при постоянной температуре — изотермический процесс, давление в нём падает. Когда перепад дорастает до Δp, пробка вылетает, поршень останавливают, газы перемешиваются и занимают весь объём при той же температуре. Класс задачи — изопроцессы в сосудах с поршнем: закон Бойля–Мариотта для правого газа и уравнение Менделеева–Клапейрона для всего газа.

Обозначения. V — объём каждого отсека вначале; ν — количество газа в отсеке (в обоих одно и то же: одинаковые p, V, T); V_1 — объём правого отсека в момент вылета пробки; p_x — установившееся давление.



Момент вылета пробки: слева газ не изменился, справа он расширился до V_1 и давление упало на Δp.

1. Газ правого отсека до вылета пробки. Количество газа справа постоянно (пробка держит), температура постоянна — работает закон Бойля–Мариотта, $pV = \text{const}$. Давление слева всё время p, поэтому пробка вылетает, когда давление справа станет $p - \Delta p$:

$$pV = (p - \Delta p)\, V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{pV}{p - \Delta p}.$$

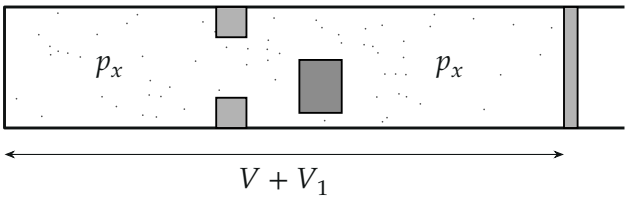
Перепад растёт непрерывно от нуля, поэтому пробка вылетает ровно при $p - \Delta p$ справа; поршень после этого стоит, V_1 дальше не меняется.

2. Весь газ после вылета пробки. Газы смешались и заняли объём $V + V_1$; всего газа 2ν, температура та же T. Уравнение Менделеева–Клапейрона для всего газа и для одного отсека в начале:

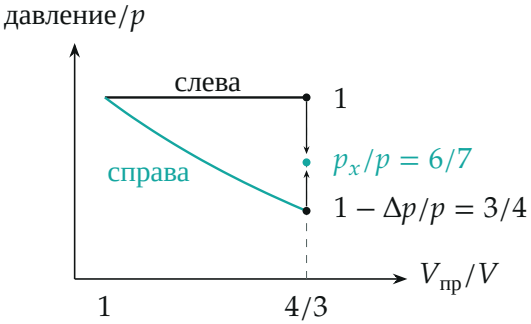
$$p_x\,(V + V_1) = 2\nu RT, \qquad pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad p_x\,(V + V_1) = 2pV.$$

Подставим V_1:

$$p_x = \frac{2pV}{V + \dfrac{pV}{p - \Delta p}} = \frac{2p\,(p - \Delta p)}{(p - \Delta p) + p} = \frac{2p\,(p - \Delta p)}{2p - \Delta p}.$$



После вылета пробки: отверстие открыто, газ всего сосуда при одном давлении p_x.



Давления в отсеках при вытягивании поршня (по формулам, пример $\Delta p = p/4$): справа — изотерма $pV/V_{пр}$; при $V_{пр} = V_1 = \frac{4}{3}V$ перепад равен Δp, пробка вылетает, давления выравниваются до $p_x = \frac{6}{7}p$.

Обратите внимание. Количество газа в отсеках одинаково только потому, что вначале у них одинаковы давление, объём и температура; после вылета пробки складываются количества газа, а не давления.

Ответ: $p_x = \dfrac{2p\,(p - \Delta p)}{2p - \Delta p}$.

Проверка. Размерность: давление^2/давление — давление. Предел $\Delta p \to 0$: пробка вылетает сразу, $p_x \to p$ — верно. Итоговое давление лежит между давлениями отсеков перед вылетом: $p - \Delta p < p_x < p$, потому что $p_x/(p - \Delta p) = 2p/(2p - \Delta p) > 1$ и $p_x/p = 2(p - \Delta p)/(2p - \Delta p) < 1$. Второй способ — через парциальные давления: левый газ расширяется от V до $V + V_1$ и даёт $pV/(V + V_1)$, правый — от V_1 при $p - \Delta p$ и даёт $(p - \Delta p)V_1/(V + V_1) = pV/(V + V_1)$; сумма $2pV/(V + V_1)$ — то же.

Смысл: пробка «отпускает» газ, когда правый отсек разрежен на Δp; после этого газ просто усредняет давление по всему увеличенному объёму.

Ответ. $p_x = \dfrac{2p\,(p - \Delta p)}{2p - \Delta p}$.