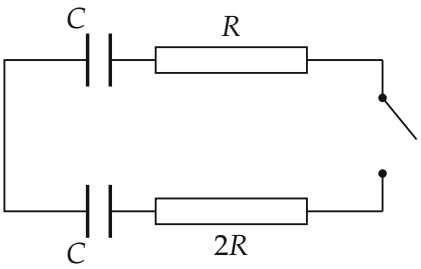
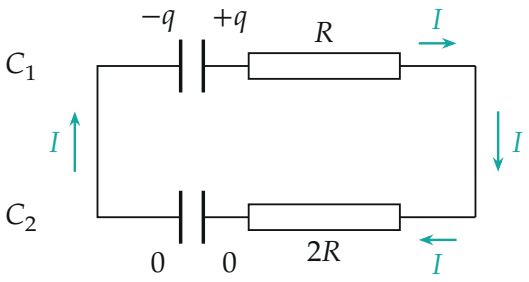
Конденсаторы и резисторы R и 2R

Задача 4. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Цепь, схема которой приведена на рисунке, состоит из двух конденсаторов ёмкости C и двух резисторов R и $2R$. До замыкания ключа пластины одного конденсатора заряжены зарядами q и $-q$, второй не заряжен. Ключ замыкают. Найти количества теплоты Q_R и Q_{2R}, выделяющиеся на соответствующих резисторах за большой промежуток времени. Считать, что вся энергия выделяется на резисторах.



▲ **Решение.** **Что происходит.** После замыкания ключа цепь — один замкнутый контур: заряженный конденсатор, R, ключ, $2R$, незаряженный конденсатор. Заряженный конденсатор гонит ток по контуру, второй конденсатор заряжается и начинает «противостоять». Ток идёт, пока напряжения конденсаторов вдоль контура не уравновесят друг друга. Энергия, которую потеряли конденсаторы, по условию целиком уходит в тепло на резисторах, а делится между резисторами по закону Джоуля–Ленца: ток через них один и тот же. Класс задачи — перезарядка конденсаторов через резисторы: закон сохранения заряда + закон сохранения энергии.

Обозначения. C_1 — заряженный вначале конденсатор (заряды $\pm q$), C_2 — незаряженный; Δq — заряд, прошедший по контуру за всё время; $W_н$, $W_к$ — энергия конденсаторов в начале и в конце; $I(t)$ — ток в контуре.

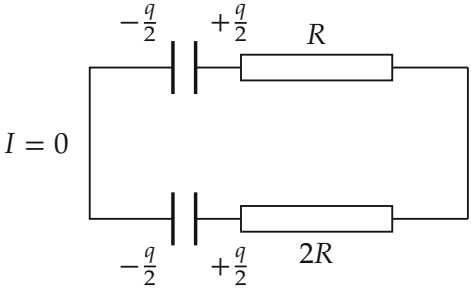


Сразу после замыкания: заряженный C_1 гонит ток по единственному контуру; через R и $2R$ идёт один и тот же ток I.

1. Сколько заряда пройдёт. Ток в контуре один, поэтому сколько заряда ушло с правой пластины C_1, столько пришло на правую пластину C_2 (закон сохранения заряда в каждом проводе, соединяющем пластины). Через большое время ток прекращается, значит, на резисторах нет напряжения, и по второму правилу Кирхгофа для контура напряжения конденсаторов равны:

$$\frac{q-\Delta q}{C}=\frac{\Delta q}{C}\quad\Rightarrow\quad \Delta q=\frac{q}{2}.$$

На каждом конденсаторе остаётся заряд $q/2$ — конденсаторы одинаковые, и заряд делится пополам.



Через большое время: ток прекратился, на конденсаторах по $q/2$, их напряжения вдоль контура направлены навстречу и уравновешены.

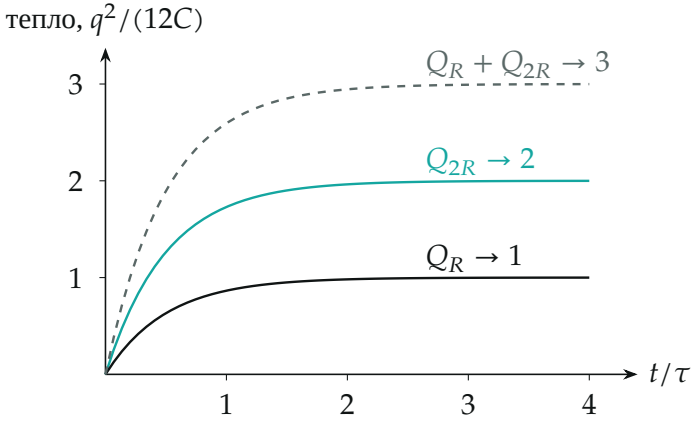
2. Сколько тепла всего. Закон сохранения энергии: убыль энергии конденсаторов равна теплу на резисторах.

$$W_н = \frac{q^2}{2C}, \qquad W_к = 2\cdot\frac{(q/2)^2}{2C} = \frac{q^2}{4C}, \qquad Q_R + Q_{2R} = W_н - W_к = \frac{q^2}{4C}.$$

Тепло не зависит от сопротивлений: оно задано начальным и конечным зарядами. Сопротивления решают только, *как* тепло делится.

3. Как тепло делится. Резисторы соединены последовательно: в каждый момент ток через них один, $I(t)$. Закон Джоуля–Ленца за малое время dt: $dQ_R = I^2R\,dt$, $dQ_{2R} = I^2\cdot 2R\,dt$. Отношение в каждый момент одно и то же, поэтому и за всё время

$$\frac{Q_{2R}}{Q_R} = 2 \quad\Rightarrow\quad Q_R = \frac{1}{3}\cdot\frac{q^2}{4C} = \frac{q^2}{12C}, \qquad Q_{2R} = \frac{2}{3}\cdot\frac{q^2}{4C} = \frac{q^2}{6C}.$$



Выделившееся тепло во времени (по формулам $Q(t) \propto 1 - e^{-2t/\tau}$, $\tau = 3R\cdot C/2$ — постоянная времени контура: последовательно $3R$ и ёмкость $C/2$). В каждый момент $Q_{2R} = 2Q_R$.

Обратите внимание. Половина энергии конденсатора теряется при любых сопротивлениях — даже при сколь угодно малых; сопротивления задают только скорость процесса и долю тепла на каждом резисторе.

Ответ: $Q_R = \frac{1}{3}\cdot\frac{q^2}{4C} = \frac{q^2}{12C}$, $Q_{2R} = \frac{2}{3}\cdot\frac{q^2}{4C} = \frac{q^2}{6C}$.

Проверка. Размерность: q^2/C — Кл·В, джоуль. Второй способ — через ток. Контур — последовательные $3R$ и два конденсатора (вместе ёмкость $C/2$), начальное напряжение q/C, ток $I = \frac{q}{3RC}e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{3RC}{2}$. Тепло на R:

$$Q_R = \int_0^\infty I^2 R\,dt = \frac{q^2R}{9R^2C^2}\cdot\frac{\tau}{2} = \frac{q^2}{9RC^2}\cdot\frac{3RC}{4} = \frac{q^2}{12C}$$

— то же. Смысл: энергию конденсаторов «съедает» контур, а делят её резисторы пропорционально сопротивлениям, как последовательная цепь делит напряжение.

Ответ. $Q_R = \frac{q^2}{12C}$, $Q_{2R} = \frac{q^2}{6C}$.