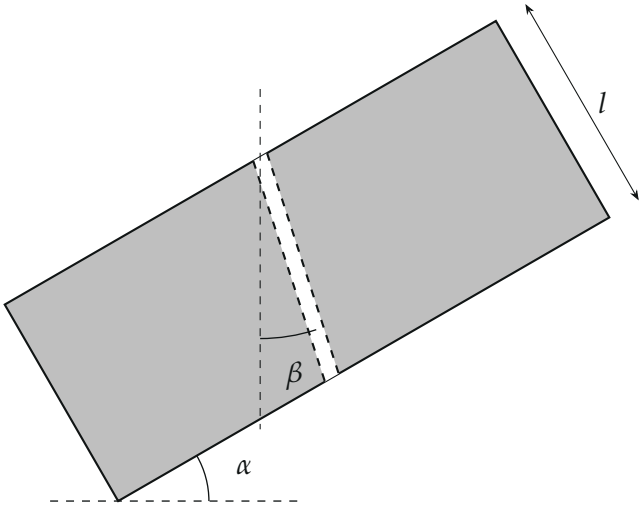
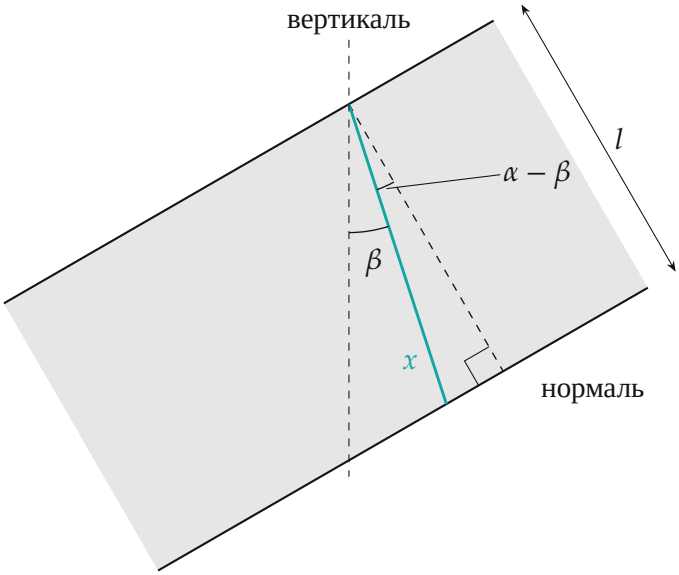
Спуск по наклонной дырке

Задача 5. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Доска толщиной l наклонена под углом α к горизонту. В доске под некоторым углом к её плоскости просверлили дырку. При каком угле наклона дырки к вертикали β время спуска маленького тела через такую дырку минимально? Найти также это время. Трение отсутствует.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело скользит по прямой дырке без трения — равноускоренно, без начальной скорости. От угла β зависят две вещи, и тянут они в разные стороны: чем ближе дырка к вертикали, тем больше ускорение, но тем длиннее путь сквозь наклонную доску (самая короткая дырка — по нормали к доске). Оптимум — между вертикалью и нормалью. Класс задачи — кинематика равноускоренного движения + поиск экстремума.

Обозначения. x — длина дырки, a — ускорение тела в дырке, t — время спуска. Нормаль к доске отклонена от вертикали на угол α (стороны углов взаимно перпендикулярны), дырка лежит между вертикалью и нормалью: с вертикалью — угол β, с нормалью — угол $\alpha - \beta$.



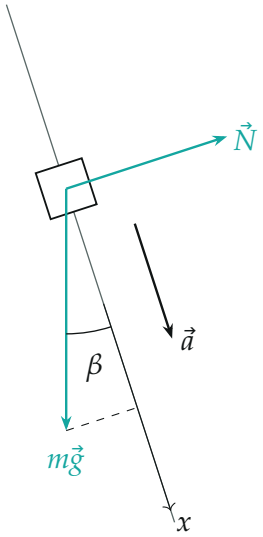
Разрез доски: нормаль (пунктир) короче всех путей, дырка x — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетом l и углом $\alpha - \beta$ при вершине.

1. Длина дырки. Нормаль, проведённая из верхнего конца дырки, — катет l прямоугольного треугольника, дырка — гипотенуза, угол между ними $\alpha - \beta$:

$$x = \frac{l}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

2. Ускорение в дырке. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции стенок $\vec{N}$, перпендикулярная дырке (трения нет). Второй закон Ньютона в проекции на ось x вдоль дырки вниз: $\vec{N}$ даёт ноль, $m\vec{g}$ составляет с осью угол β:

$$ma = mg\cos\beta \quad \Rightarrow \quad a = g\cos\beta.$$



Тело в дырке: реакция $\vec{N}$ перпендикулярна дырке, вдоль дырки действует только проекция силы тяжести $mg\cos\beta$.

3. Время спуска. Равноускоренное движение без начальной скорости: $x = at^2/2$, откуда

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g\cos(\alpha-\beta)\cos\beta}}.$$

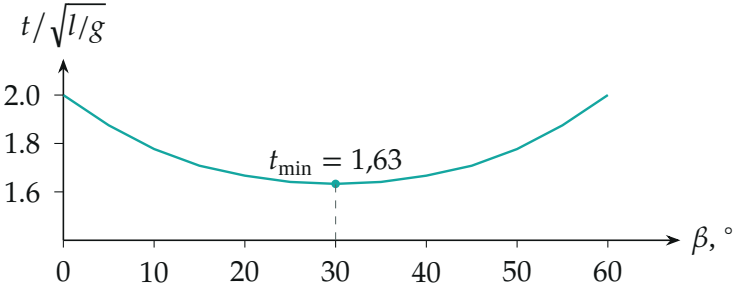
Произведение косинусов превратим в сумму, $2\cos(\alpha-\beta)\cos\beta = \cos\alpha + \cos(\alpha-2\beta)$:

$$t = \sqrt{\frac{4l}{g\left[\cos\alpha + \cos(\alpha-2\beta)\right]}}.$$

4. Минимум. От β зависит только $\cos(\alpha-2\beta)$ в знаменателе; время минимально, когда он максимален и равен 1:

$$\alpha - 2\beta = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \qquad t_{\min} = \sqrt{\frac{4l}{g\,(1+\cos\alpha)}} = \frac{1}{\cos(\alpha/2)}\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Дырка, дающая быстрейший спуск, — биссектриса угла между вертикалью и нормалью к доске.



Время спуска при $\alpha = 60°$ (по формуле, шаг 5°): $\beta = 0$ (вертикаль) и $\beta = \alpha$ (нормаль) дают одно время $2\sqrt{l/g}$, минимум $\sqrt{8/3}\sqrt{l/g} \approx 1{,}63\sqrt{l/g}$ — ровно посередине, при $\beta = 30°$.

Обратите внимание. Ни вертикальная дырка (наибольшее ускорение), ни дырка по нормали (кратчайший путь) не оптимальны: выигрыш одного множителя съедается другим, и при $\beta = 0$ и $\beta = \alpha$ время одно и то же.

Ответ: $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, $\quad t_{\min} = \sqrt{\dfrac{4l}{g\,(1+\cos\alpha)}}$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{l/g}$ — секунды. Предел $\alpha = 0$ (доска горизонтальна): $\beta = 0$, $t_{\min} = \sqrt{2l/g}$ — свободное падение на высоту l, верно. Второй способ — теорема Галилея о хордах: время скольжения из верхней точки вертикальной окружности по любой хорде одно и то же. Из точки входа проведём окружность с верхней точкой в ней, касающуюся нижней плоскости доски; хорда в точку касания — самая быстрая (до остальных точек плоскости хорда того же времени не дотягивается). Радиус в точку касания идёт по нормали, вертикальный диаметр — по вертикали; треугольник «точка входа — центр — точка касания» равнобедренный, поэтому хорда делит угол α пополам: $\beta = \alpha/2$ — то же.

Смысл: оптимальная дырка «делит спор» между вертикалью и нормалью ровно пополам.

Ответ. $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$; $\quad t_{\min} = \sqrt{\dfrac{4l}{g\,(1+\cos\alpha)}}$.