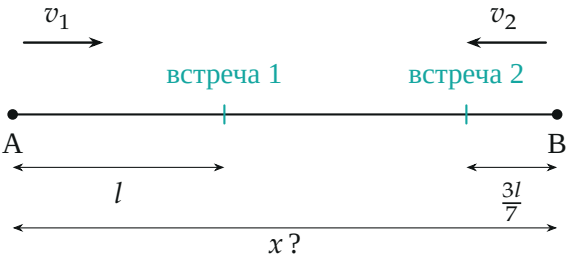
# Две машины и две встречи

**Задача 1.** [Росатом 2021/22, отборочный этап, 8 класс, задача 1] Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали две машины и встретились на расстоянии $l$ от города A. После встречи машины продолжили движение в тех же направлениях, доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/7$ от города B. Найти расстояние между городами A и B. Скорости машин постоянны, машины разворачиваются мгновенно.




*Поясняющий рисунок: дорога A—B, места двух встреч и известные расстояния*

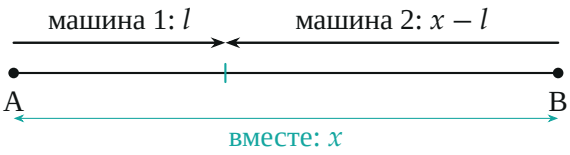
▲ **Решение. Что происходит.** Машины едут с постоянными скоростями, поэтому путь каждой пропорционален времени. Главная идея — сравнить *суммарный* путь двух машин до первой и до второй встречи: до первой они вместе проезжают одно расстояние между городами, до второй — три. Значит, вторая встреча наступает втрое позже первой, и каждая машина к ней проезжает втрое больший путь. Класс задачи: равномерное движение навстречу, «сумма путей».

**Обозначения.** $x$ — расстояние между городами A и B (его ищем); $v_1$ — скорость машины из A, $v_2$ — скорость машины из B; $t_1$ — время от старта до первой встречи, $t_2$ — до второй.

**1. До первой встречи (сумма путей).** Машины едут навстречу и встречаются, когда вместе проехали весь отрезок AB:

$$v_1 t_1 + v_2 t_1 = (v_1 + v_2)\, t_1 = x.$$

Машина из А при этом проехала $v_1 t_1 = l$.

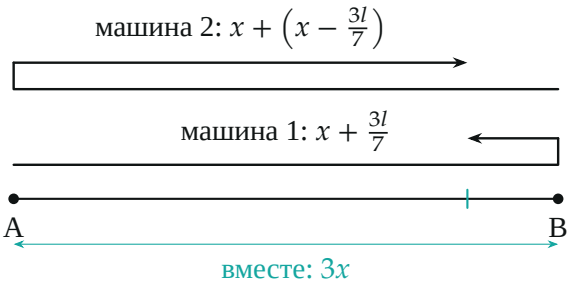



*До первой встречи машины вместе проезжают один отрезок AB*

**2. До второй встречи (сумма путей).** Каждая машина доехала до другого города (вместе это $2x$), развернулась, и после разворотов они снова сближаются, пока вместе не покроют ещё один отрезок $x$: машина 1 проезжает от B $\frac{3l}{7}$, машина 2 от A — остальное, $x - \frac{3l}{7}$. Итого

$$(v_1 + v_2)\, t_2 = x + x + x = 3x.$$

Это верно, если обе машины успели развернуться до второй встречи; проверим это в конце.




*До второй встречи: каждая машина доезжает до другого города и возвращается; вместе — три отрезка AB*

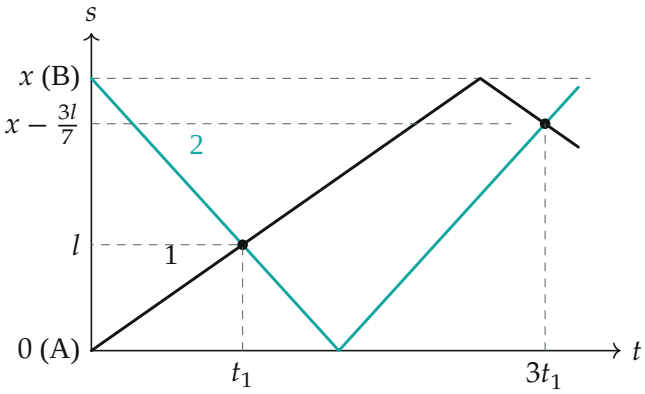
**3. Отношение времён и путь машины 1.** Делим уравнение пункта 2 на уравнение пункта 1 — скорости сокращаются:

$$\frac{t_2}{t_1} = 3.$$

Скорость машины 1 постоянна, значит, до второй встречи она проехала втрое больше, чем до первой: $v_1 t_2 = 3l$. С другой стороны, по рисунку её путь — весь отрезок AB и ещё $\frac{3l}{7}$ обратно от B:

$$3l = x + \frac{3l}{7} \quad \Rightarrow \quad x = 3l - \frac{3l}{7} = \frac{18}{7}l.$$

**4. График движения.** Отношение скоростей: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{l}{x-l} = \frac{7}{11}$. По нему построен график координат машин (отсчёт от A) — две ломаные пересекаются при $t_1$ на расстоянии $l$ от A и при $3t_1$ на расстоянии $\frac{3l}{7}$ от B; машина 2 разворачивается в A раньше, чем машина 1 в B, и обе развороты происходят до второй встречи.




*Координата s машин от города A: чёрная — машина 1 (из A), бирюзовая — машина 2 (из B); точки — встречи. Построено при* $v_1 : v_2 = 7 : 11$

Обратите внимание: вторая встреча происходит не через удвоенное, а через *утроенное* время первой — до неё машины вместе проезжают три отрезка AB, а не два.

**Проверка.** Размерность: $x$ выражено через $l$ — длина. Второй способ, через машину 2: до второй встречи она проезжает $3(x-l)$, и это $x + \left(x - \frac{3l}{7}\right)$; отсюда $3x - 3l = 2x - \frac{3l}{7}$, $x = \frac{18}{7}l$ — то же. Условия задачи выполнены: $x > l$ (первая встреча между городами) и $x > \frac{3l}{7}$; машина 1

доезжает до B за $\frac{x}{v_1} = \frac{18}{7}t_1 < 3t_1$, машина 2 до A за $\frac{x}{v_2} = \frac{18}{11}t_1 < 3t_1$ — обе разворачиваются до второй встречи.

Смысл: при постоянных скоростях отношение путей машин всё время одно и то же, поэтому весь вопрос сводится к тому, во сколько раз вторая встреча позже первой.

**Ответ.** $x = \frac{18}{7}\,l \approx 2{,}57\,l$.