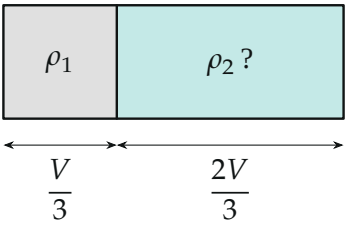
Тело из двух частей

Задача 2. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 8 класс, задача 2] Тело составили из двух частей, имеющих разную плотность. Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объёма тела, но четвёртую часть его массы. Найдите плотность второй части тела.



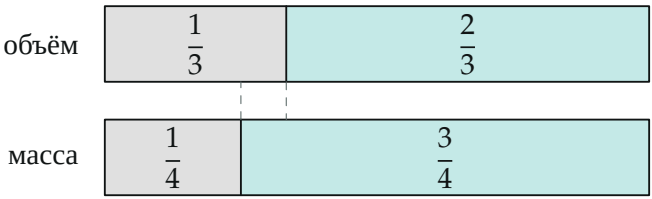
Поясняющий рисунок: тело из двух частей, первая занимает треть объёма

▲ **Решение. Что происходит.** Плотность — масса единицы объёма. Первая часть занимает треть объёма, а весит лишь четверть массы, значит, она «лёгкая», и вторая часть плотнее первой. Главная идея — записать массу и объём каждой части в долях всего тела и разделить. Класс задачи: плотность составного тела.

Обозначения. V и M — объём и масса всего тела; V_1, m_1 — объём и масса первой части (плотность ρ_1), V_2, m_2 — второй части (плотность ρ_2 ищем).

1. Доли второй части. Объёмы и массы частей складываются:

$$V_1 = \frac{V}{3}, \quad V_2 = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}; \qquad m_1 = \frac{M}{4}, \quad m_2 = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}.$$



Доли частей в объёме (сверху) и в массе (снизу): серым — первая часть, бирюзой — вторая

2. Плотности (определение плотности $\rho = m/V$). Для каждой части:

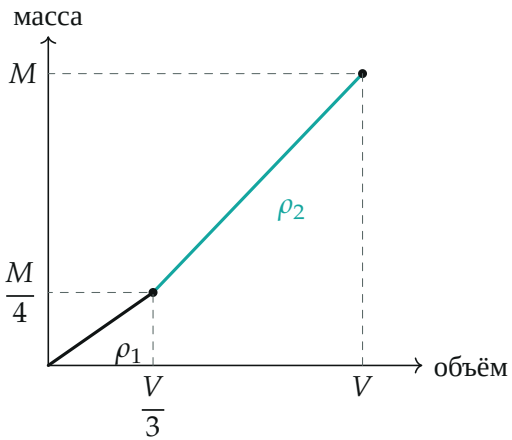
$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{M/4}{V/3} = \frac{3}{4}\frac{M}{V}, \qquad \rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{3M/4}{2V/3} = \frac{9}{8}\frac{M}{V}.$$

Неизвестные M и V уходят, если разделить второе равенство на первое:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{9/8}{3/4} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1.$$

Вторая часть плотнее первой, как мы и ожидали. Средняя плотность тела $\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{4}{3}\rho_1$ лежит между ρ_1 и $\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1$.

3. График массы от объёма. Если «набирать» тело от первой части ко второй, масса растёт по ломаной: наклон каждого участка — плотность части. Ломаная проходит через точки $\left(\frac{V}{3};\ \frac{M}{4}\right)$ и $(V;\ M)$; второй участок круче первого в $\frac{3}{2}$ раза.

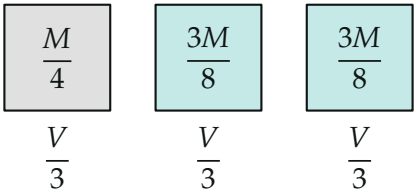


Масса тела, набираемого от первой части ко второй: наклон участка — плотность части

4. Второй способ — равные объёмы. Разрежем вторую часть на два куска объёмом $\frac{V}{3}$ каждый — таким же, как у первой части. Масса второй

части $\frac{3M}{4}$ делится на них поровну, по $\frac{3M}{8}$. При равных объёмах плотности относятся как массы:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{3M/8}{M/4} = \frac{3}{2}.$$



Первая часть (серым) и вторая, разрезанная на два куска того же объёма (бирюзой); в кубиках — их массы

Обратите внимание: «третья часть объёма» и «четвёртая часть массы» относятся к *первой* части; у второй — оставшиеся $\frac{2}{3}$ объёма и $\frac{3}{4}$ массы, а не $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

Проверка. Размерность: ρ_2 выражена через ρ_1 — кг/м^3. Масса тела по найденной плотности: $\rho_1 \frac{V}{3} + \frac{3}{2}\rho_1 \cdot \frac{2V}{3} = \frac{4}{3}\rho_1 V$, а четверть её $\frac{1}{3}\rho_1 V$ — это масса первой части $\rho_1 \frac{V}{3}$, как в условии. Предел: если бы доли объёма и массы первой части совпадали, вышло бы $\rho_2 = \rho_1$ — однородное тело.

Смысл: первая часть занимает больше места, чем «положено» по массе, поэтому она менее плотная, а вторая — плотнее в полтора раза.

Ответ. $\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1$.