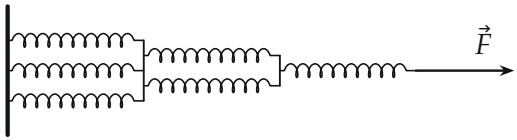
Шесть пружин

Задача 3. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 8 класс, задача 3] Имеется шесть одинаковых пружин с коэффициентом жёсткости k и длиной l. Пружины соединили так, как показано на рисунке. Какую силу $\vec{F}$ нужно приложить к концу системы пружин, чтобы длина системы увеличилась в $3/2$ раза. Считать, что закон Гука справедлив для любых удлинений пружин.



▲ **Решение. Что происходит.** Пружины невесомы, поэтому каждая из них и каждая соединительная планка в равновесии: сумма сил на них равна нулю. Сила F передаётся по цепочке групп целиком, а внутри группы одинаковые параллельные пружины делят её поровну. Зная силу на каждой пружине, по закону Гука найдём её удлинение и сложим удлинения трёх групп. Класс задачи: последовательно-параллельное соединение пружин.

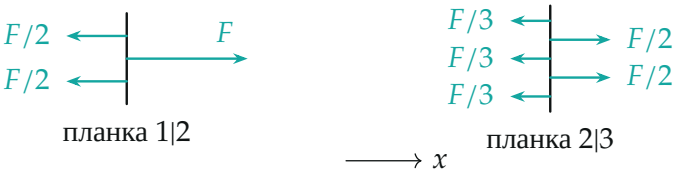
Обозначения. Группа 1 — одна пружина у конца (справа), группа 2 — две параллельные пружины в середине, группа 3 — три параллельные пружины у стенки. F_1, F_2, F_3 — сила упругости одной пружины в группе, $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ — удлинение группы. Ось x — вдоль пружин вправо, по силе $\vec{F}$.

1. Силы в пружинах (условие равновесия невесомых тел). Пружина группы 1 невесома, сумма сил на ней равна нулю: справа её тянет сила $\vec{F}$, значит, слева планка тянет её силой $-\vec{F}$, и сила упругости пружины $F_1 = F$. Планка между группами 1 и 2 тоже невесома: в проекции на ось x одиночная пружина тянет её вправо с силой F, а две пружины группы 2 — влево, каждая с силой F_2:

$$F - 2F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{F}{2}.$$

Пружины одинаковы и растянуты одинаково (планка соединяет их концы), поэтому силы в них равны — так и делится сила поровну. То же для планки между группами 2 и 3:

$$2F_2 - 3F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = \frac{F}{3}.$$



Силы, с которыми пружины тянут невесомые планки; длина стрелки — по модулю силы. Сумма сил на каждой планке равна нулю

2. Удлинения групп (закон Гука для одной пружины). Удлинение пружины равно силе, делённой на жёсткость; пружины одной группы растянуты одинаково, и это же удлинение у всей группы:

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k}, \qquad \Delta l_2 = \frac{F}{2k}, \qquad \Delta l_3 = \frac{F}{3k}.$$

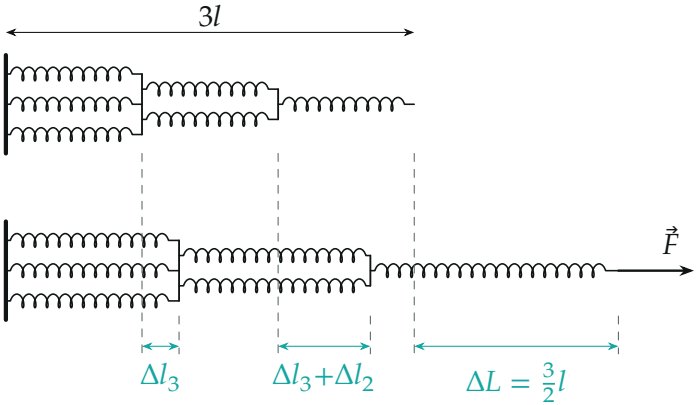
Чем больше пружин в группе, тем меньше она растягивается: две параллельные пружины ведут себя как одна жёсткостью $2k$, три — как одна жёсткостью $3k$.

3. Удлинение всей системы. Группы соединены последовательно, их удлинения складываются:

$$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{F}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11F}{6k}.$$

Без нагрузки система состоит из трёх групп длиной l каждая, её длина $3l$. Увеличиться в $3/2$ раза — значит стать $\frac{9}{2}l$, то есть удлиниться на

$$\Delta L = \frac{3}{2} \cdot 3l - 3l = \frac{3}{2}\,l.$$

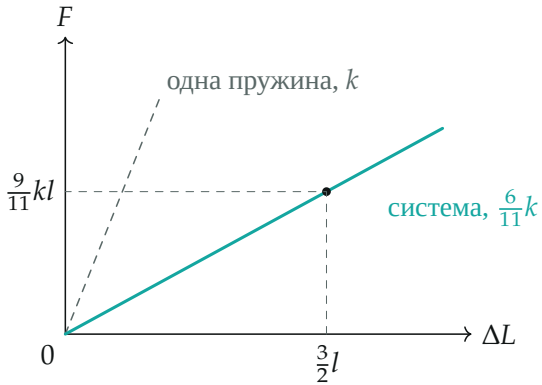


Сверху — система без нагрузки (длина $3l$), снизу — под силой F: каждая группа удлиняется на свою величину, конец смещается на ΔL. Удлинения в масштабе $\Delta l_3 : \Delta l_2 : \Delta l_1 = 2 : 3 : 6$

4. Сила. Приравниваем удлинения:

$$\frac{11F}{6k} = \frac{3}{2}l \quad \Rightarrow \quad F = \frac{9}{11}kl.$$

Вся система ведёт себя как одна пружина жёсткостью $k_э = \dfrac{F}{\Delta L} = \dfrac{6}{11}k$: её удлинение пропорционально силе, и прямая на графике ниже проходит через точку $\left(\frac{3}{2}l;\ \frac{9}{11}kl\right)$.



Сила, растягивающая систему, линейно зависит от её удлинения; система «мягче» одной пружины

Обратите внимание: увеличение длины в $3/2$ раза — это удлинение на половину начальной длины, то есть на $\frac{3}{2}l$, а не на $\frac{3}{2}\cdot 3l$ и не на $\frac{1}{2}l$: начальная длина системы $3l$, а не l.

Проверка. Размерность: $[kl] = \text{Н/м}\cdot\text{м} = \text{Н}$ — сила. Второй способ, через жёсткости групп: параллельные пружины складывают жёсткости ($k,\ 2k,\ 3k$), последовательные — обратные жёсткости:

$$\frac{1}{k_э} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} = \frac{11}{6k}, \qquad F = k_э\cdot\frac{3}{2}l = \frac{9}{11}kl$$

— то же. Предел: если бы в каждой группе стояло по одной пружине (три последовательно, $k_э = k/3$), понадобилась бы сила $\frac{1}{2}kl$ — меньше, как и должно быть для более мягкой системы.

Смысл: самая мягкая часть системы — одиночная пружина, она даёт больше половины всего удлинения (6 из 11 долей).

Ответ. $F = \frac{9}{11}kl$.