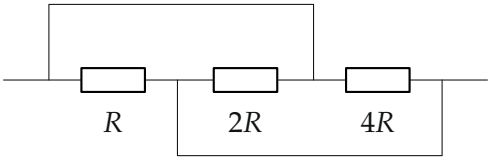
Сопротивление цепи резисторов

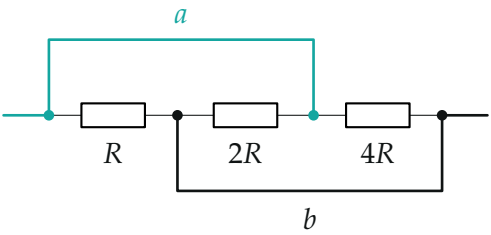
Задача 4. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 8 класс, задача 4] Найти сопротивление электрической цепи, схема которой показана на рисунке. Сопротивления резисторов даны на схеме. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Провод без сопротивления не создаёт разности потенциалов: все точки, соединённые таким проводом, имеют один потенциал, и их можно считать одним узлом. Главная идея — найти, сколько в схеме на самом деле разных узлов, и между какими из них стоит каждый резистор. Окажется, что узлов всего два, и все три резистора подключены к ним — то есть параллельно. Класс задачи: эквивалентная схема, «стягивание» проводов в узлы.

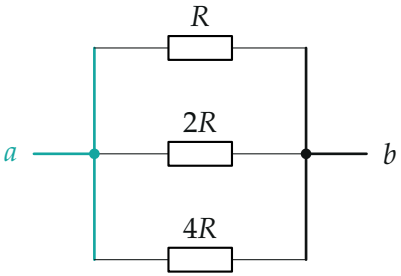
Обозначения. Узел a — левый вывод цепи и всё, что соединено с ним проводами; узел b — правый вывод и всё, что соединено с ним. U — напряжение между выводами, I — ток через цепь.

1. Узлы схемы (провод без сопротивления — один потенциал). Идём по проводам от левого вывода: он соединён с левым концом резистора R, а верхний провод соединяет эту точку с точкой между $2R$ и $4R$ — всё это узел a. От правого вывода: он соединён с правым концом $4R$, а нижний провод ведёт к точке между R и $2R$ — это узел b. Других точек в схеме нет.



Узел a (бирюзой) и узел b (чёрным жирным): точки, соединённые проводами, имеют один потенциал

2. Эквивалентная схема. Теперь видно, к каким узлам подключён каждый резистор: R — между a (слева) и b; $2R$ — между b (слева) и a; $4R$ — между a (слева) и b. Все три резистора соединяют одни и те же два узла, значит, они соединены параллельно, и на каждом одно и то же напряжение U.



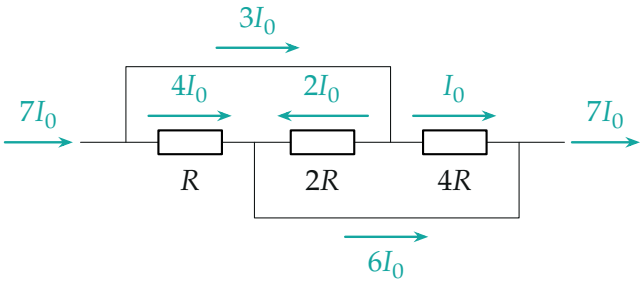
Та же цепь после «стягивания» проводов: три резистора между узлами a и b

3. Сопротивление (параллельное соединение). Токи ветвей складываются, напряжение у них общее:

$$I = \frac{U}{R} + \frac{U}{2R} + \frac{U}{4R} = \frac{7U}{4R}, \qquad R_{\text{об}} = \frac{U}{I} = \frac{4R}{7}.$$

То же по формуле параллельного соединения: $\dfrac{1}{R_{\text{об}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{4R} = \dfrac{7}{4R}$.

4. Токи в исходной схеме. Обозначим $I_0 = \dfrac{U}{4R}$. Тогда через R течёт $4I_0$ (от a к b, вправо), через $2R$ — $2I_0$ (от a к b, то есть *влево*), через $4R$ — I_0 (вправо). Верхний провод несёт к узлу между $2R$ и $4R$ ток этих двух резисторов, $3I_0$; нижний провод — ток R и $2R$, $6I_0$; из цепи выходит $6I_0 + I_0 = 7I_0 = I$.



Токи в исходной схеме в единицах $I_0 = U/(4R)$: в резисторе $2R$ ток течёт справа налево

Обратите внимание: резисторы на схеме нарисованы в ряд, но это не последовательное соединение — провода замыкают их концы так, что каждый оказывается между выводами цепи. Сумма $R + 2R + 4R = 7R$ здесь неверна.

Проверка. Размерность: $R_{об}$ выражено через R — Ом. Предел и знак: при параллельном соединении общее сопротивление меньше наименьшего из резисторов; $\frac{4}{7}R < R$ — верно. Баланс токов в узлах (пункт 4): в узел b между R и $2R$ входят $4I_0$ и $2I_0$, уходят $6I_0$ по нижнему проводу; в узел между $2R$ и $4R$ входит $3I_0$, уходят $2I_0 + I_0$ — сходится.

Смысл: провода без сопротивления «склеивают» точки, и вся цепь — три параллельные ветви между выводами.

Ответ. $R_{об} = \dfrac{4R}{7} \approx 0{,}57\,R$.