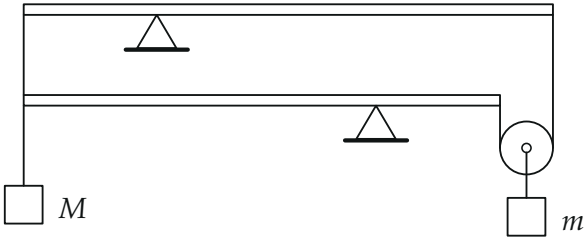
Два рычага и блок

Задача 5. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 8 класс, задача 5] Два рычага опираются о точечные опоры так, что каждый из них делится в отношении 5:1. Левые концы рычагов, находящиеся на одной вертикали, соединены нитью. К левому концу нижнего рычага с помощью нити прикреплено тело массой M. Правые концы рычагов соединены веревкой, которая охватывает невесомый блок, к оси которого прикреплено тело неизвестной массы m (см. рисунок). Найти массу m, при которой система находится в равновесии. Массы рычагов малы.



▲ **Решение. Что происходит.** Система неподвижна, поэтому для каждого рычага сумма моментов сил относительно его опоры равна нулю, а для блока и для каждого тела сумма сил равна нулю. Главная идея — идти от известного к неизвестному: блок даёт натяжение верёвки на правых концах, верхний рычаг — натяжение нити между левыми концами, нижний рычаг — уравнение на m. Моменты берём относительно опор, чтобы не понадобились силы реакции опор. Класс задачи: равновесие системы рычагов и блоков.

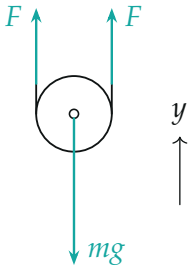
Обозначения. F — натяжение верёвки, охватывающей блок (одно по всей длине: верёвка и блок невесомы, трения нет); T — натяжение нити между левыми концами рычагов. У верхнего рычага опора ближе к левому концу: левое плечо l, правое $5l$; у нижнего — ближе к правому: левое плечо $5l_1$, правое l_1 (так на рисунке). Нить с телом M натянута силой Mg (тело в равновесии).

1. Блок (условие равновесия блока с грузом m). На блок вверх действуют два куска верёвки, каждый с силой F, вниз — нить груза с силой

mg. В проекции на вертикаль

$$2F - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{2}.$$

Эта же верёвка тянет *вниз* оба правых конца рычагов с силой F.



Силы на блоке вместе с грузом m: две ветви верёвки вверх и вес груза вниз ($2F = mg$)

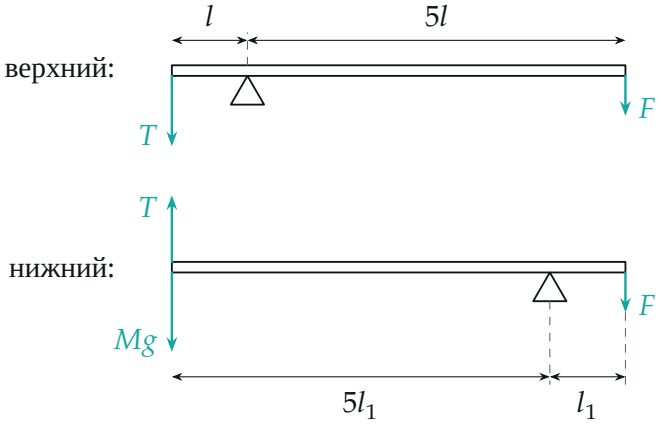
2. Верхний рычаг (правило моментов относительно его опоры). На левый конец нить тянет вниз с силой T (плечо l, поворачивает против часовой стрелки), на правый конец верёвка тянет вниз с силой F (плечо $5l$, по часовой):

$$T \cdot l = F \cdot 5l \quad \Rightarrow \quad T = 5F = \frac{5}{2}mg.$$

Короткое плечо у нити, поэтому она натянута в пять раз сильнее верёвки.

3. Нижний рычаг (правило моментов относительно его опоры). На левый конец действуют две силы: нить с телом M тянет вниз с силой Mg, нить от верхнего рычага — вверх с силой T; вместе это сила $Mg - T$ вниз на плече $5l_1$ (против часовой стрелки). На правый конец верёвка тянет вниз с силой F на плече l_1 (по часовой):

$$(Mg - T) \cdot 5l_1 = F \cdot l_1.$$



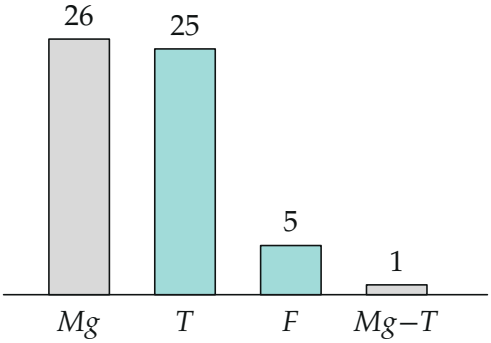
Силы на рычагах (реакции опор не показаны — их момент относительно опоры равен нулю). Плечи — в отношении 1 : 5 *и* 5 : 1

4. Масса груза. Подставляем $F = \frac{mg}{2}$ и $T = \frac{5}{2}mg$:

$$5\left(Mg - \frac{5}{2}mg\right) = \frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \quad 5M = \frac{25}{2}m + \frac{1}{2}m = 13m,$$

$$m = \frac{5}{13}M.$$

5. Силы в равновесии. В единицах $\frac{Mg}{26}$: вес тела Mg — 26, натяжение нити между рычагами $T = \frac{5}{2}mg = \frac{25}{26}Mg$ — 25, натяжение верёвки $F = \frac{mg}{2} = \frac{5}{26}Mg$ — 5. Результирующая сила на левом конце нижнего рычага $Mg - T$ — всего 1: нить от верхнего рычага почти целиком держит тело M, а маленький остаток уравновешивает верёвка на коротком плече.



Силы в равновесии в единицах $Mg/26$ при $m = \frac{5}{13}M$

Обратите внимание: нить между рычагами тянет верхний рычаг *вниз*, а нижний — *вверх* (третий закон Ньютона), поэтому на левом конце нижнего рычага силы Mg и T вычитаются. А верёвка, охватывающая блок, тянет оба правых конца одной и той же силой $\frac{mg}{2}$ — вниз.

Проверка. Размерность: m выражена через M — кг. Знак: $Mg - T = \frac{1}{26}Mg > 0$ — левый конец нижнего рычага действительно тянет вниз, как мы и предположили при записи моментов; нить между рычагами натянута ($T > 0$). Второй способ — равновесие верхнего рычага по силам: реакция его опоры $N = T + F = 3mg$, а момент относительно левого конца $N \cdot l = F \cdot 6l$ даёт $N = 6F = 3mg$ — то же.

Смысл: два рычага с отношением плеч $5 : 1$, включённые навстречу друг другу, почти уравновешивают тело M одной нитью, и груз на блоке нужен лишь чуть больше трети массы M.

Ответ. $m = \dfrac{5}{13}M \approx 0{,}38\,M$.