Две машины и две встречи

Задача 1. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали две машины и встретились на расстоянии l от города A. После встречи машины продолжили движение в тех же направлениях, доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/7$ от города B. Найти расстояние между городами A и B. Скорости машин постоянны, машины разворачиваются мгновенно.



Поясняющий рисунок: места двух встреч на дороге.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Скорости постоянны, поэтому пути машин растут пропорционально времени. Удобно считать не путь каждой машины, а *суммарный* путь двух машин: к первой встрече они вместе проезжают расстояние между городами, ко второй — втрое больше. Значит, вторая встреча наступает втрое позже первой, и каждая машина к ней проезжает втрое больший путь, чем к первой. Класс задачи — равномерное движение, встречи (суммарный путь).

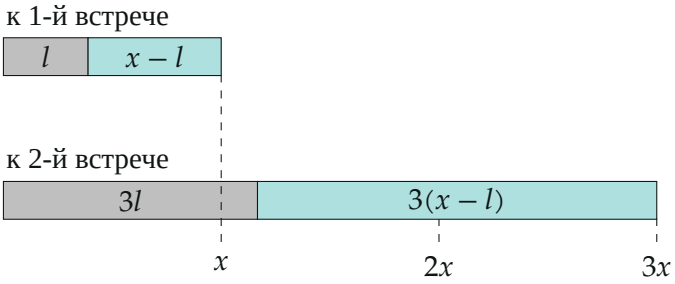
Обозначения. x — расстояние AB; v_1, v_2 — скорости машин из A и из B; t — время до первой встречи, t' — до второй.

1. Суммарный путь к первой встрече. Машины выехали одновременно навстречу и встретились — вместе они проехали всю дорогу:

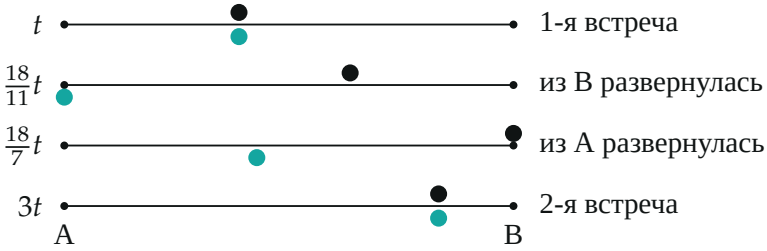
$$(v_1 + v_2)\, t = x.$$

2. Суммарный путь ко второй встрече. Каждая машина доехала до чужого города (вместе $2x$: каждая проехала всю дорогу), развернулась, и затем вместе они снова сошлись (ещё x: от двух концов дороги навстречу до точки встречи):

$$(v_1 + v_2)\, t' = x + x + x = 3x \quad \Rightarrow \quad t' = 3t.$$



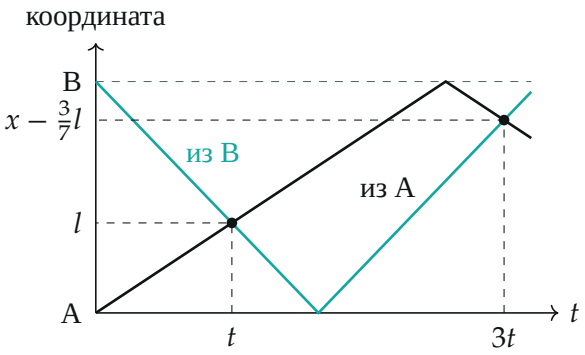
Пути машин (серым — из A, бирюзой — из B) в масштабе для найденного $x = \frac{18}{7}l$: вместе к первой встрече — x, ко второй — $3x$; каждая машина проехала втрое больше.



Раскадровка для $x = \frac{18}{7}l$ (по формулам, $v_1 : v_2 = 7 : 11$): чёрная точка — машина из A (над дорогой), бирюзовая — из B (под дорогой). Обе разворачиваются раньше второй встречи.

3. Путь машины из А. За время $3t$ при постоянной скорости машина из A проехала втрое больше, чем к первой встрече, то есть $3l$. С другой стороны, это вся дорога до B и обратно до точки второй встречи, которая на $\frac{3}{7}l$ от B:

$$3l = x + \frac{3}{7}l \quad \Rightarrow \quad x = 3l - \frac{3}{7}l = \frac{18}{7}\,l.$$



Графики движения (по формулам, $v_1 : v_2 = 7 : 11$, $x = \frac{18}{7}l$): первая встреча — в момент t на расстоянии l от A, вторая — ровно в $3t$ на расстоянии $\frac{3}{7}l$ от B.

Обратите внимание. Утверждение «ко второй встрече суммарный путь равен $3x$» верно, если обе машины успели развернуться до второй встречи. Здесь это так: вторая встреча на расстоянии $\frac{3}{7}l$ от B, а машина из A проехала $3l > x$, то есть побывала в B.

Ответ: $x = 3l - \dfrac{3}{7}l = \dfrac{18}{7}\,l$.

Проверка. Размерность — длина. Второй способ — через машину из B: она к первой встрече проехала $x - l = \frac{11}{7}l$, ко второй — втрое больше, $\frac{33}{7}l$; это вся дорога $\frac{18}{7}l$ плюс путь от A до точки второй встречи $x - \frac{3}{7}l = \frac{15}{7}l$: $\frac{18}{7} + \frac{15}{7} = \frac{33}{7}$ — верно. Отношение скоростей $v_1 : v_2 = l : (x - l) = 7 : 11$ — машина из B быстрее, поэтому первая встреча ближе к A ($l < x/2$) — согласуется с графиком.

Смысл: при постоянных скоростях «счётчик» суммарного пути делает время второй встречи втрое большим, а дальше всё решает путь одной машины.

Ответ. $AB = \dfrac{18}{7}\,l$.