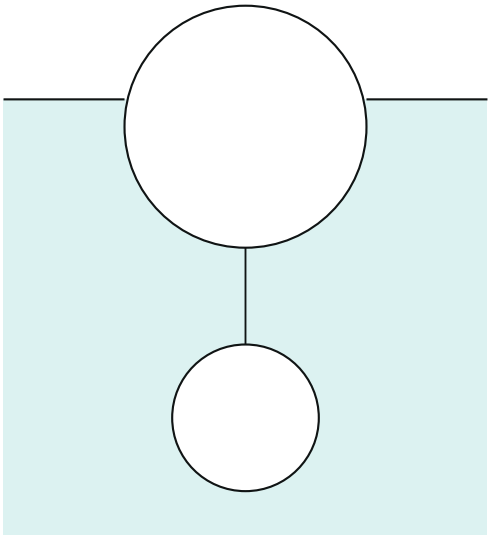
Связанные шары в жидкости

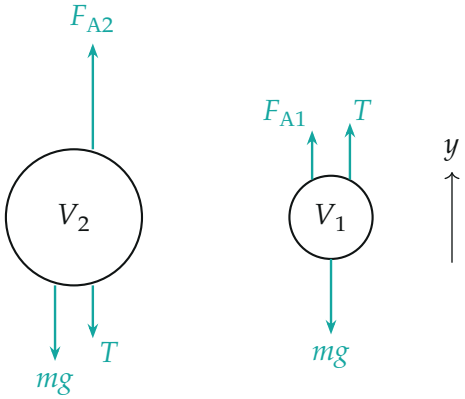
Задача 2. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Два шара одинаковых масс, но разных объёмов связаны невесомой верёвкой и плавают в жидкости. Известно, что в равновесии в жидкость погружены один из шаров целиком и две трети объёма второго шара. Найти плотность шара большего объёма, если плотность шара меньшего объёма равна ρ_1. Плотность жидкости ρ_0.



Поясняющий рисунок (в масштабе для $\rho_1 = 2\rho_0$): большой шар сверху погружён на две трети объёма, маленький снизу — целиком.

▲ **Решение. Что происходит.** Массы шаров равны, поэтому шар меньшего объёма плотнее. Сначала выясним, какой шар где: натянутая верёвка тянет нижний шар вверх, а верхний вниз, — это и решает, какой из них погружён целиком. Затем запишем условие равновесия всей системы: верёвка — внутренняя сила и в нём не участвует. Класс задачи — плавание тел, закон Архимеда, равновесие системы тел.

Обозначения. m — масса каждого шара; $V_1 = m/\rho_1$ — объём меньшего (плотного) шара, $V_2 = m/\rho_2$ — большего, ρ_2 — искомая плотность ($\rho_2 < \rho_1$); T — сила натяжения верёвки.



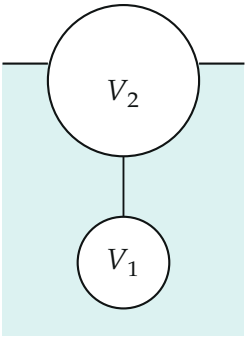
верхний нижний

Силы на шары: на верхний верёвка тянет вниз, на нижний — вверх; силы Архимеда — по погружённым объёмам.

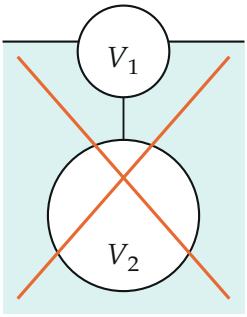
1. Какой шар внизу. Первый закон Ньютона в проекции на ось y (вверх) для каждого шара:

$$\text{нижний: } F_{\text{A}}^{\text{н}} + T = mg, \qquad \text{верхний: } F_{\text{A}}^{\text{в}} = mg + T.$$

Для нижнего шара $F_{\text{A}}^{\text{н}} < mg$: он тяжелее вытесненной им жидкости даже при полном погружении, то есть его плотность больше ρ_0. Для верхнего, наоборот, архимедова сила больше веса. Нижний шар тонет сам по себе, поэтому он и погружён целиком (верхний только частично: шар, погружённый на $\frac{2}{3}$, может быть лишь верхним — нижний под верхним полностью в жидкости). Плотнее из двух шаров — шар меньшего объёма, значит, внизу — шар объёма V_1, а погружён на две трети — больший шар V_2.



так



не так

Два мыслимых расположения: слева — верное, справа — невозможное (лёгкий большой шар внизу всплыл бы). Нижний шар натягивает верёвку, значит, он плотнее жидкости и плотнее верхнего; плотнее — меньший шар V_1.

2. Равновесие системы. Для системы «два шара + верёвка» натяжение — внутренняя сила. Первый закон Ньютона в проекции на ось y: силы Архимеда (погружён объём V_1 целиком и $\frac{2}{3}V_2$) уравновешивают силу тяжести $2mg$:

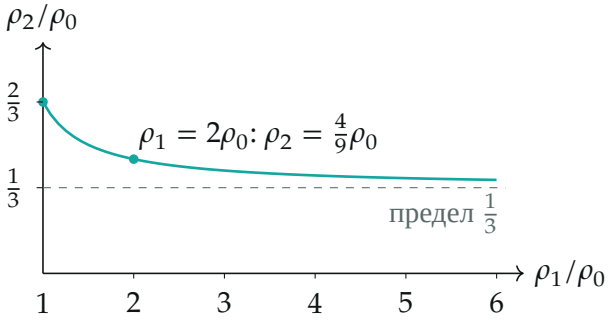
$$\rho_0 g\, V_1 + \rho_0 g \cdot \frac{2}{3} V_2 = 2mg \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \frac{m}{\rho_1} + \frac{2}{3}\rho_0 \frac{m}{\rho_2} = 2m.$$

Сократим на m и выразим ρ_2:

$$\frac{2\rho_0}{3\rho_2} = 2 - \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{2\rho_1 - \rho_0}{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_0 \rho_1}{2\rho_1 - \rho_0}.$$

Обратите внимание. Ответ имеет смысл только при $\rho_1 > \rho_0$: иначе нижний шар не натягивал бы верёвку и не мог быть погружён целиком при частично погружённом верхнем. При $\rho_1 > \rho_0$ автоматически $\rho_2 < \frac{2}{3}\rho_0 < \rho_0$ — верхний шар действительно всплывает.

Ответ: $\rho_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_0 \rho_1}{2\rho_1 - \rho_0}$ (при $\rho_1 > \rho_0$).



Ответ как функция ρ_1 (по формуле): при $\rho_1 \to \rho_0$ (нижний шар почти не тянет) $\rho_2 \to \frac{2}{3}\rho_0$ — шар, плавающий сам на две трети; при очень тяжёлом нижнем шаре $\rho_2 \to \frac{1}{3}\rho_0$.

Проверка. Размерность: $\rho \cdot \rho/\rho$ — плотность. Второй способ — через натяжение. Нижний шар: $T = mg - \rho_0 g V_1 = mg(1 - \rho_0/\rho_1)$. Верхний: $\frac{2}{3}\rho_0 g V_2 = mg + T = mg(2 - \rho_0/\rho_1)$, откуда $\frac{2\rho_0}{3\rho_2} = 2 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$ — то же уравнение. Пример $\rho_1 = 2\rho_0$: $\rho_2 = \frac{4}{9}\rho_0$, объёмы $V_2/V_1 = \rho_1/\rho_2 = 4{,}5$; архимедова сила $\rho_0 g(V_1 + \frac{2}{3} \cdot 4{,}5 V_1) = 4\rho_0 g V_1 = 2 \cdot 2\rho_0 g V_1 = 2mg$ — верно.

Смысл: лёгкий большой шар работает поплавком, тяжёлый маленький — грузом; поплавок погружается ровно настолько, чтобы держать оба шара.

Ответ. $\rho_2 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\rho_0 \rho_1}{2\rho_1 - \rho_0}$.