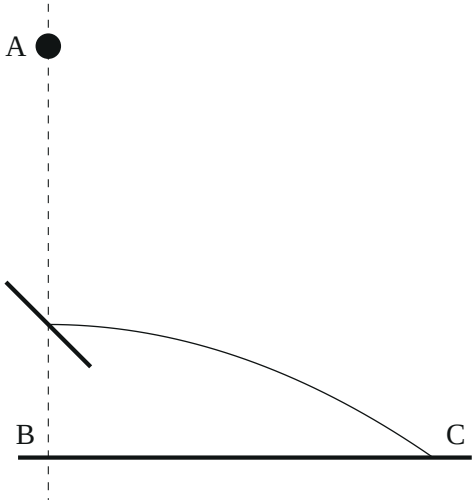
Падение на наклонную дощечку

Задача 5. [Росатом 2021/22, отборочный этап, 9 класс, задача 5] Тело падает с высоты H на землю без начальной скорости из точки A. На некоторой высоте h от поверхности земли закрепляют дощечку, ориентированную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. При падении тело испытывает абсолютно упругий удар о дощечку и падает на землю в точке C (см. рисунок). При какой высоте h расстояние BC будет максимальным? Ответ обосновать. Найти это максимальное расстояние.



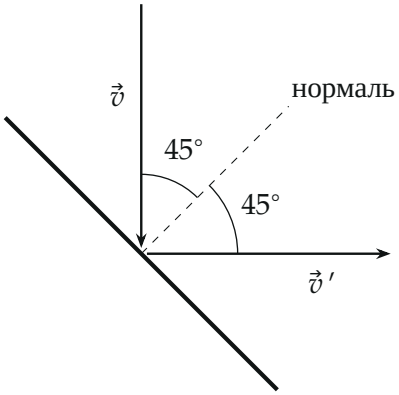
▲ **Решение.** **Что происходит.** До дощечки тело свободно падает и набирает скорость. Удар абсолютно упругий о неподвижную дощечку под 45°: скорость сохраняет модуль и отражается, как свет от зеркала, — вертикальная скорость превращается в горизонтальную. После удара тело летит, как брошенное горизонтально с высоты h. Чем ниже дощечка, тем больше скорость после удара, но тем меньше времени до земли, — отсюда максимум. Класс задачи — свободное падение, упругий удар, бросок горизонтально + поиск экстремума.

Обозначения. v — скорость тела перед ударом (и после него), t — время полёта от дощечки до земли, $s = BC$. Ось x — горизонтально от B к C, ось y — вертикально вверх.

1. Скорость перед ударом. Закон сохранения механической энергии при свободном падении с высоты H до высоты h (сопротивления нет):

$$mg\,(H-h)=\frac{mv^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2g\,(H-h)}.$$

2. Удар о дощечку. При абсолютно упругом ударе о неподвижную гладкую дощечку составляющая скорости вдоль дощечки сохраняется, а составляющая по нормали меняет знак — угол падения равен углу отражения. Скорость $\vec{v}$ направлена вниз, нормаль к дощечке — под 45° к вертикали, поэтому отражённая скорость повёрнута на $2\cdot 45^\circ=90^\circ$: она горизонтальна и по модулю равна v.

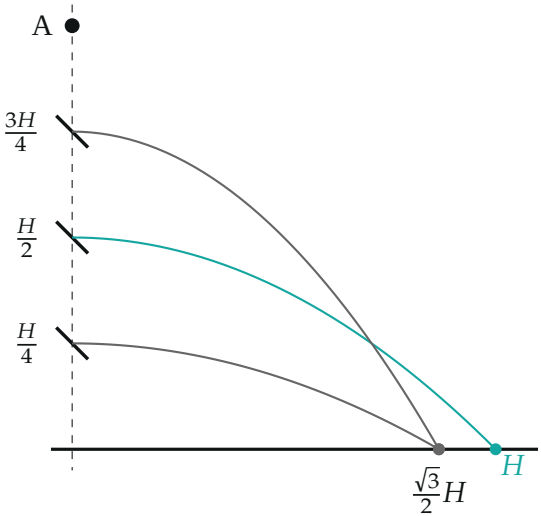


Удар о дощечку: вертикальная скорость $\vec{v}$ составляет 45° с нормалью, отражённая $\vec{v}\,'$ — тоже 45° по другую сторону, то есть горизонтальна; $|\vec{v}\,'|=|\vec{v}|$.

3. Полёт после удара. Бросок горизонтально с высоты h со скоростью v. По вертикали — свободное падение без начальной вертикальной скорости, по горизонтали — равномерное движение:

$$h=\frac{gt^2}{2}\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

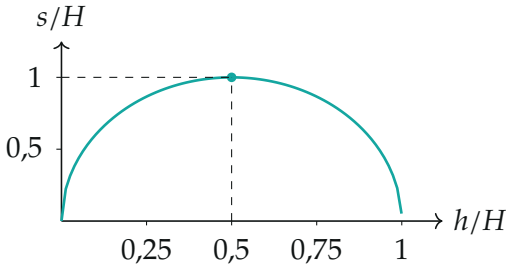
$$s=vt=\sqrt{2g\,(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{h\,(H-h)}.$$



Траектории после удара (по формуле $y = h - x^2/(4(H-h))$) для $h = H/4$, $H/2$, $3H/4$: крайние дают одно и то же $s = \frac{\sqrt{3}}{2}H$, дальше всех — при $h = H/2$, $s = H$.

4. Максимум. Под корнем — произведение двух множителей h и $H-h$ с постоянной суммой H. Такое произведение — парабола ветвями вниз с нулями в $h = 0$ и $h = H$, её вершина посередине:

$$h = \frac{H}{2}, \qquad s_{\max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\cdot\frac{H}{2}} = H.$$



Дальность $s(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$ (по формуле): нули при $h = 0$ и $h = H$, единственный максимум $s = H$ при $h = H/2$; в осях h/H, s/H кривая — половина эллипса.

Обратите внимание. Удар упругий и дощечка под 45° — только поэтому после удара скорость горизонтальна и равна v. Без этого полёт начался бы с вертикальной составляющей скорости, и формула $t = \sqrt{2h/g}$ не работала бы.

Ответ: $h = \dfrac{H}{2}$, $\quad BC_{\max} = 2\sqrt{\dfrac{H}{2}\cdot\dfrac{H}{2}} = H$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{h(H-h)}$ — метры. Пределы: $h \to H$ — скорость перед ударом нулевая, $s \to 0$; $h \to 0$ — нет времени на полёт, $s \to 0$; оба верны. Второй способ — неравенство о средних: $\sqrt{h\,(H-h)} \le \dfrac{h+(H-h)}{2} = \dfrac{H}{2}$, равенство при $h = H - h$, то есть $s \le H$ при $h = H/2$ — то же.

Смысл: высоту H выгодно поделить поровну — половина на разгон, половина на полёт; тогда тело улетает по горизонтали ровно на H.

Ответ. $h = H/2$; $\quad BC_{\max} = H$.