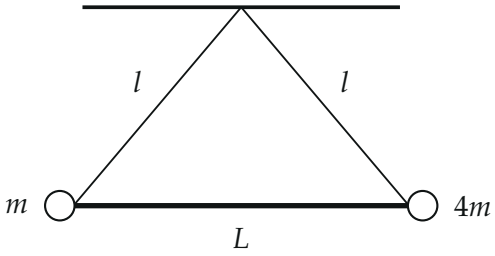
Грузы со стержнем

Задача 3. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Два груза с массами m и $4m$ подвешены на невесомых нерастяжимых нитях длиной l, прикреплённых к одной точке горизонтального потолка. Между телами вставляют невесомый стержень длиной L, прикрепляют к ним и удерживают систему в таком положении, что стержень горизонтален (см. рисунок). В некоторый момент времени тела отпускают. Найти их ускорения сразу после этого.



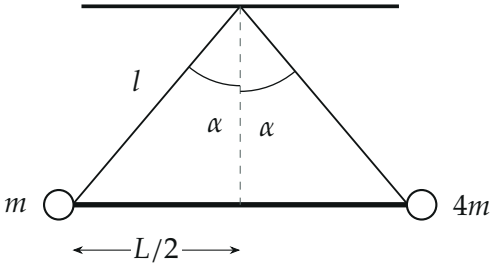
▲ **Решение.** **Что происходит.** Сразу после отпускания тела ещё неподвижны. Тяжёлый груз $4m$ начинает опускаться по дуге окружности радиуса l и толкает стержень, а тот толкает лёгкий груз m по его дуге вверх. Класс задачи — связанные тела в момент старта: скорости нулевые, поэтому центростремительных ускорений нет и ускорение каждого тела направлено по касательной к его окружности (перпендикулярно нити). Главная идея: стержень нерастяжим, значит, проекции ускорений тел на направление стержня равны.

Обозначения. α — угол между каждой нитью и вертикалью; $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ — ускорения грузов m и $4m$; T — сила, с которой стержень давит на каждый груз (стержень невесом, поэтому силы с его стороны на два груза равны по модулю и направлены вдоль стержня в разные стороны); N_1, N_2 — силы натяжения нитей.

1. Геометрия. Нити и стержень образуют равнобедренный треугольник с основанием L и боковыми сторонами l. Высота из точки подвеса

делит основание пополам, поэтому

$$\sin\alpha = \frac{L}{2l}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{L^2}{4l^2}}.$$

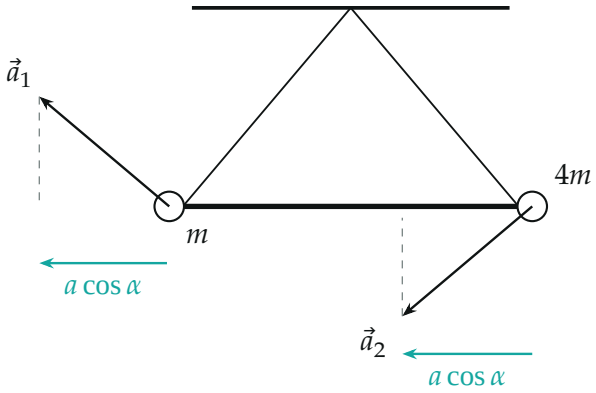


Угол α между нитью и вертикалью: $\sin\alpha = \dfrac{L/2}{l}$

2. Направление ускорений. Каждый груз движется по окружности радиуса l с центром в точке подвеса. Проекция ускорения на радиус (на нить) равна v^2/l; в первый момент $v = 0$, поэтому эта проекция равна нулю и ускорение каждого груза направлено по касательной — перпендикулярно его нити. Груз $4m$ тяжелее и идёт вниз: его ускорение направлено вниз-влево, под углом α к горизонтали. Стержень толкает груз m влево, поэтому груз m идёт вверх-влево, тоже под углом α к горизонтали.

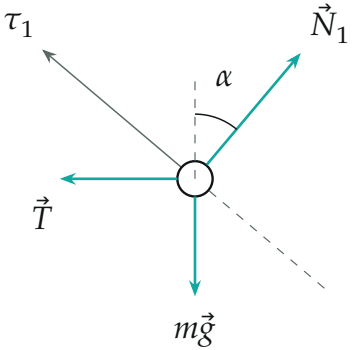
3. Связь ускорений. Стержень нерастяжим и несжимаем: расстояние между грузами не меняется, поэтому проекции их скоростей, а значит и ускорений, на направление стержня одинаковы. Оба ускорения составляют с горизонтальным стержнем угол α:

$$a_1\cos\alpha = a_2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a.$$

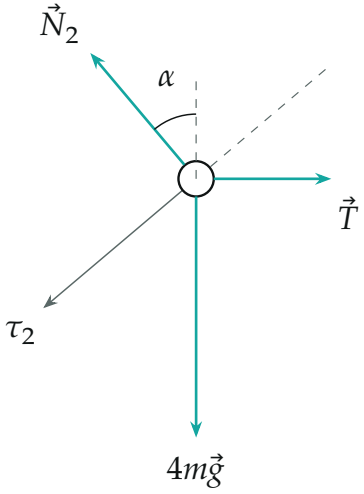


Ускорения грузов перпендикулярны нитям; их проекции на стержень одинаковы, поэтому $a_1 = a_2$

4. Силы. На груз m действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, натяжение нити $\vec{N}_1$ (вдоль нити к точке подвеса) и сила $\vec{T}$ со стороны стержня (вдоль стержня, влево). На груз $4m$ — $4m\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и сила $\vec{T}$ со стороны стержня вправо. Для каждого груза ось направим по касательной в сторону его ускорения: τ_1 — вверх-влево, τ_2 — вниз-влево. Такой выбор удобен: силы натяжения нитей перпендикулярны этим осям и в уравнения не войдут.



тело m



тело $4m$

Силы на грузы и касательные оси τ_1, τ_2 (вдоль ускорений)

5. Второй закон Ньютона в проекциях на касательные. Ось τ_1 составляет угол α с горизонталью и $90^\circ - \alpha$ с вертикалью, поэтому проекция силы T (горизонтальна, влево) на неё равна $T\cos\alpha$, проекция mg (вниз) равна $-mg\sin\alpha$. Для груза $4m$ ось τ_2 направлена вниз-влево: проекция $4mg$ равна $+4mg\sin\alpha$, силы T (вправо) — $-T\cos\alpha$:

$$ma = T\cos\alpha - mg\sin\alpha, \qquad 4ma = 4mg\sin\alpha - T\cos\alpha.$$

Неизвестных две (a и T); сложим уравнения, и сила стержня уйдёт:

$$5ma = 3mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{5}g\sin\alpha = \frac{3}{10}\frac{gL}{l}.$$

Из первого уравнения $T\cos\alpha = m(a + g\sin\alpha) = \frac{8}{5}mg\sin\alpha > 0$ — стержень действительно сжат и толкает грузы, как мы и предположили.

Обратите внимание. Ускорения перпендикулярны нитям только в первый момент, пока скорости равны нулю; позже появится центростремительная составляющая. И ещё: ускорения грузов не равны как векторы — совпадают лишь их проекции на стержень, а вертикальные составляющие противоположны.

Проверка. Размерность: gL/l — ускорение. Пределы: при равных массах M и M получили бы $(M-M)g\sin\alpha/(2M) = 0$ — система в равновесии, верно; при $L \to 0$ нити вертикальны и $a \to 0$ — тоже верно. Второй способ — энергия: при малом сдвиге s вдоль касательных груз $4m$ опускается на $s\sin\alpha$, груз m поднимается на столько же; мощность силы тяжести $(4m-m)g\,v\sin\alpha$ равна скорости роста кинетической энергии $5m\,v\,a$, откуда $a = \frac{3}{5}g\sin\alpha$ — совпало. Смысл: систему разгоняет разность сил тяжести вдоль касательных $3mg\sin\alpha$, а разгонять приходится обе массы, $5m$.

Ответ. Ускорения грузов равны по модулю: $a = \frac{3}{10}\frac{gL}{l}$; оба направлены перпендикулярно нитям (груз $4m$ — вниз, груз m — вверх; горизонтальные составляющие у обоих направлены в сторону груза m).