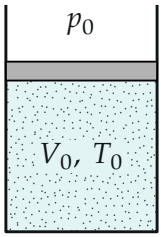
Газ и поршень с трением

Задача 4. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 4] В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. Объём газа V_0, абсолютная температура T_0, давление газа равно внешнему давлению p_0. Между поршнем и стенками сосуда действует сила трения. Газ в сосуде медленно нагревают, и при температуре $\frac{6T_0}{5}$ поршень начинает перемещаться. Газ нагревают до температуры $2T_0$, затем нагрев прекращают, и газ медленно остывает до первоначальной температуры. Построить график зависимости объёма газа от его температуры для указанного процесса и найти объём и давление газа во всех состояниях, когда меняется характер процесса, происходящего с газом. Считать, что максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда не зависит от их температуры.



Поясняющий рисунок: газ под невесомым поршнем, снаружи давление p_0

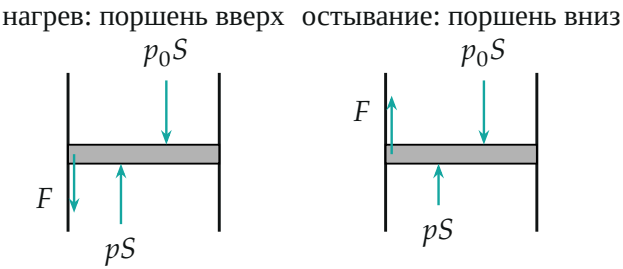
▲ **Решение. Что происходит.** Поршень невесом, поэтому он движется только тогда, когда разность сил давления газа и воздуха достигает максимальной силы трения покоя. Пока разность меньше — поршень стоит, процесс изохорный. Когда поршень ползёт медленно, сила трения равна своему максимальному значению, разность давлений постоянна — процесс изобарный. Класс задачи — газ под поршнем с трением: на каждом этапе сначала выясняем, движется ли поршень и куда направлено трение. Этапов четыре: изохорный нагрев, изобарный нагрев, изохорное остывание, изобарное остывание.

Обозначения. S — площадь поршня, F — максимальная сила трения покоя, $\Delta p = F/S$; состояния: 1 — начало (T_0), 2 — начало движения ($\frac{6}{5}T_0$), 3 — конец нагрева ($2T_0$), 4 — поршень снова сдвинулся

при остывании, 5 — конец (T_0). Количество газа не меняется, поэтому $pV/T = \text{const}$ (уравнение Менделеева — Клапейрона).

1. Сила трения. Запишем второй закон Ньютона для невесомого поршня в момент, когда он вот-вот сдвинется вверх: сумма сил равна нулю (масса нулевая). Газ давит вверх силой pS, воздух вниз — p_0S, трение покоя против возможного движения, вниз, и равно максимальному F. Поршень стоит до этого момента, поэтому $V = V_0$, а давление по закону Шарля $p_2 = p_0 \cdot \frac{6T_0/5}{T_0} = \frac{6}{5}p_0$:

$$p_2S - p_0S - F = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{F}{S} = \frac{1}{5}p_0.$$



Силы на поршень при движении вверх ($pS = p_0S + F$) и вниз ($pS + F = p_0S$)

2. Изобарный нагрев (2 → 3). Газ нагревают медленно, поршень ползёт с ничтожным ускорением, трение скольжения равно F (максимальная сила не зависит от температуры). Значит, давление постоянно: $p_3 = \frac{6}{5}p_0$. По закону Гей-Люссака $V/T = \text{const}$:

$$V_3 = V_0 \cdot \frac{2T_0}{6T_0/5} = \frac{5}{3}V_0.$$

3. Изохорное остывание (3 → 4). Нагрев прекратили, газ остывает, давление падает. Чтобы поршень пошёл вниз, давление газа должно опуститься ниже p_0 настолько, чтобы воздух преодолел трение, теперь направленное вверх. Пока $p_0 - \Delta p < p < p_0 + \Delta p$, поршень стоит. Он

сдвинется при

$$p_4 = p_0 - \Delta p = \frac{4}{5}\,p_0,$$

$$T_4 = 2T_0 \cdot \frac{p_4}{p_3} = 2T_0 \cdot \frac{4/5}{6/5} = \frac{4}{3}\,T_0, \qquad V_4 = \frac{5}{3}\,V_0.$$

4. Изобарное остывание (4 → 5). Поршень ползёт вниз при постоянном $p = \frac{4}{5}p_0$ до конечной температуры T_0:

$$V_5 = \frac{5}{3}\,V_0 \cdot \frac{T_0}{4T_0/3} = \frac{5}{4}\,V_0, \qquad p_5 = \frac{4}{5}\,p_0.$$

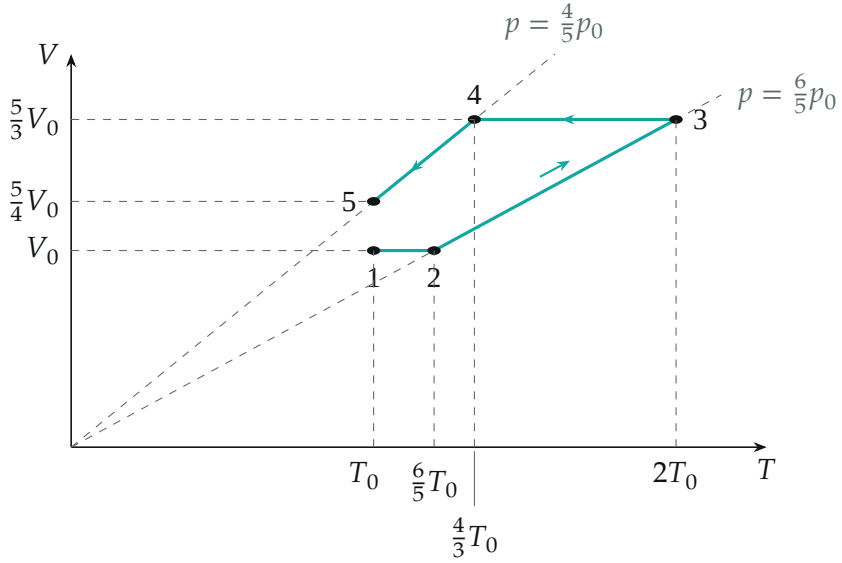
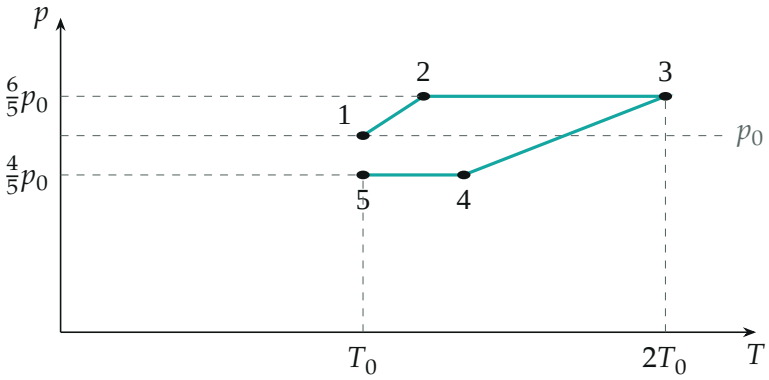


График $V(T)$: изохора 1–2, изобара 2–3, изохора 3–4, изобара 4–5. Изобары — отрезки прямых через начало координат (пунктир)

Те же этапы на диаграмме $p(T)$: изохоры — отрезки прямых через начало координат, изобары — горизонтальные отрезки на высоте $p_0 \pm \Delta p$.



Тот же процесс на диаграмме $p(T)$: давление «зажато» между $\frac{4}{5}p_0$ и $\frac{6}{5}p_0$

Обратите внимание. Газ не возвращается в исходное состояние: при той же температуре T_0 его объём $\frac{5}{4}V_0$, а давление $\frac{4}{5}p_0$. Поршень, застрявший из-за трения, «запоминает» историю — процесс необратим.

Проверка. Каждое состояние проверим по pV/T, которое должно равняться p_0V_0/T_0:

$$3\colon \frac{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}}{2}=1, \qquad 4\colon \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}=1, \qquad 5\colon \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}}{1}=1.$$

Предел: без трения ($\Delta p \to 0$) поршень двигался бы сразу и при остывании вернулся бы в V_0 — в формулах $p_2 = p_4 = p_0$ и $V_5 = V_0$. Смысл: трение создаёт «зазор» давлений шириной $2\Delta p$, в котором поршень стоит.

Ответ. 1) T_0: V_0, p_0; 2) $\frac{6}{5}T_0$: V_0, $\frac{6}{5}p_0$; 3) $2T_0$: $\frac{5}{3}V_0$, $\frac{6}{5}p_0$; 4) $\frac{4}{3}T_0$: $\frac{5}{3}V_0$, $\frac{4}{5}p_0$; 5) T_0: $\frac{5}{4}V_0$, $\frac{4}{5}p_0$. График $V(T)$ — изохора, изобара, изохора, изобара (на рисунке).