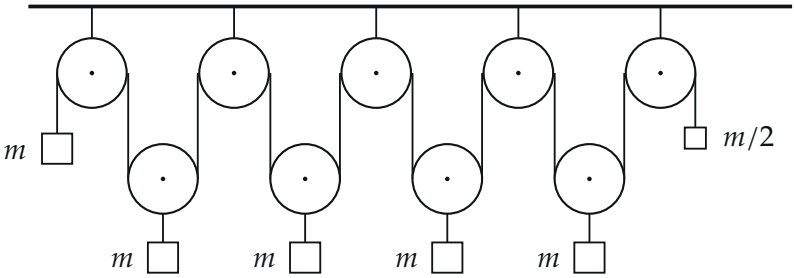
Девять блоков и тела

Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Имеется девять одинаковых невесомых блоков, пять из которых неподвижны (их оси прикреплены к горизонтальному потолку), четыре — подвижны и охватываются одной и той же невесомой нерастяжимой нитью. К осям подвижных блоков и к одному из концов нити, охватывающей блоки, прикреплены пять тел с одинаковой массой m. Ко второму концу нити прикреплено тело массой $\frac{m}{2}$. Найти ускорения всех тел.



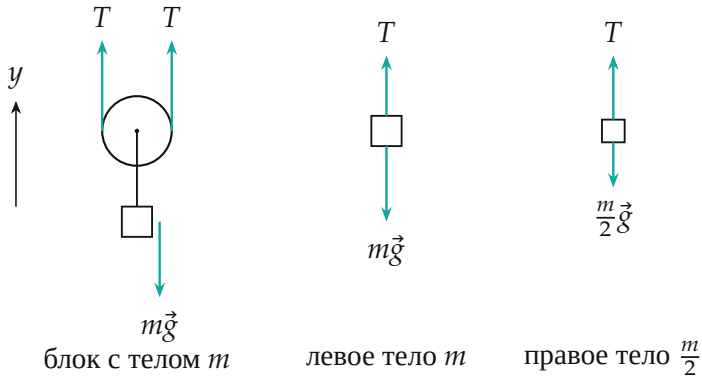
▲ **Решение.** **Что происходит.** Одна нить проходит через все блоки, блоки невесомы и без трения, поэтому натяжение T одинаково по всей длине нити. Каждый подвижный блок тянут вверх две ветви нити — силой $2T$; левое тело тянет одна ветвь — силой T, правое тело тоже T. Класс задачи — блоки: на каждое тело второй закон Ньютона и одна кинематическая связь из нерастяжимости нити.

Обозначения. Ось y — вертикально вверх. a — проекция ускорения тела на подвижном блоке (у всех четырёх уравнения одинаковые, значит, и ускорения), $a_{\text{л}}$ — левого тела m, $a_{\text{п}}$ — правого тела $m/2$; T — натяжение нити.

1. Второй закон Ньютона. Подвижный блок невесом, поэтому силы на него уравновешены, и тело на его оси тянут вверх с силой $2T$. Для тела на подвижном блоке, левого и правого тел в проекциях на ось y:

$$ma = 2T - mg, \qquad ma_{\text{л}} = T - mg, \qquad \frac{m}{2}a_{\text{п}} = T - \frac{m}{2}g.$$

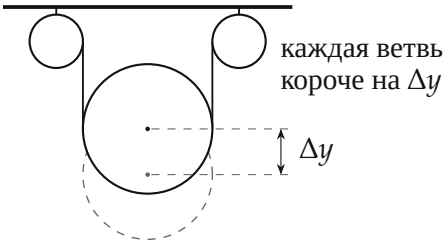
Первое и третье уравнения совпадают (третье умножим на 2): $a_п = a$ — правое тело движется так же, как тела на подвижных блоках.



блок с телом m левое тело m правое тело $\frac{m}{2}$

Силы на тела: тело на подвижном блоке тянут две ветви нити, левое и правое — по одной

2. Кинематическая связь. Длина нити постоянна. Её можно разбить на куски: левый конец (от первого блока до левого тела), по две вертикальные ветви у каждого подвижного блока и правый конец. Пусть тела на подвижных блоках и правое тело поднялись на Δy. Каждый подвижный блок поднялся на Δy, и обе его ветви укоротились на Δy — всего $2\Delta y$ на блок, $8\Delta y$ на четыре блока; правая ветвь укоротилась ещё на Δy. Освободившаяся нить $9\Delta y$ уходит на левый конец, и левое тело опускается на $9\Delta y$.



Подвижный блок поднялся на Δy (пунктир — прежнее положение): обе его ветви укоротились на Δy

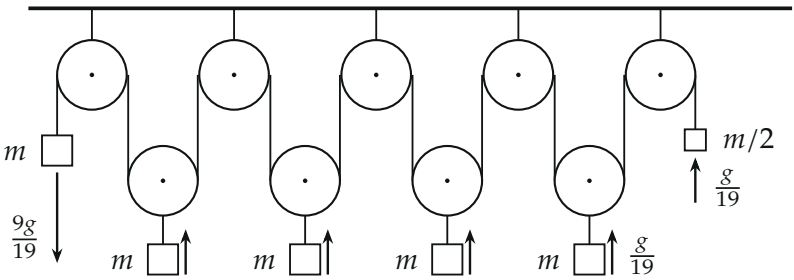
Связь перемещений верна в любой момент, поэтому такая же связь у ускорений:

$$a_л = -9a.$$

3. Решение системы. Из уравнения левого тела $T = mg + ma_л = mg - 9ma$, подставим в первое:

$$ma = 2(mg - 9ma) - mg \quad \Rightarrow \quad 19a = g, \qquad a = \frac{g}{19}, \qquad a_л = -\frac{9g}{19}.$$

$a > 0$ — тела на подвижных блоках и правое тело поднимаются; $a_л < 0$ — левое тело опускается. Натяжение $T = mg - \frac{9}{19}mg = \frac{10}{19}mg > 0$ — нить натянута, решение допустимо.



Ускорения: левое тело вниз $9g/19$, остальные вверх $g/19$

Обратите внимание. Правое тело $m/2$ *поднимается*, хотя его тянет то же натяжение T, что и опускающееся левое тело m: сила на единицу массы у него $T/(m/2) = 2T/m$ — такая же, как у тел на подвижных блоках, поэтому их уравнения совпадают.

Проверка. Размерность: $g/19$ — ускорение. Второй способ — энергия: при подъёме тел на подвижных блоках и правого тела со скоростью v левое опускается со скоростью $9v$. Мощность силы тяжести равна скорости роста кинетической энергии:

$$mg \cdot 9v - 4mg\,v - \frac{m}{2}\,g\,v = m \cdot 9v \cdot 9a + 4m\,v\,a + \frac{m}{2}\,v\,a,$$

$$4{,}5\,g = 85{,}5\,a, \quad a = \frac{g}{19}$$

— совпало. Смысл: система блоков даёт девятикратный выигрыш в силе, поэтому вес левого тела почти уравновешивает остальные, а инерция левого тела, движущегося в 9 раз быстрее, входит с множителем 81 — отсюда маленькое ускорение.

Ответ. Тела на подвижных блоках и правое тело $\frac{m}{2}$: $a = \frac{g}{19}$, вверх; левое тело m: $\frac{9g}{19}$, вниз.