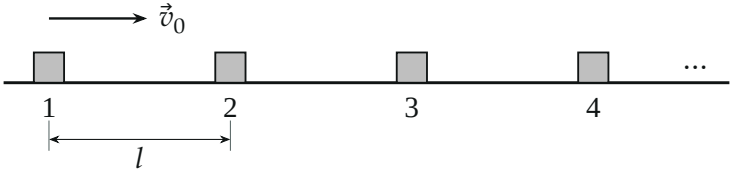
Цепочка тел на льду

Задача 1. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Во льду сделали очень длинный прямой желоб и на равных расстояниях $l = 40$ см расположили цепочкой одинаковые тела. Первому телу цепочки сообщили скорость $v_0 = 1{,}3$ м/с в направлении всех остальных тел. Сколько тел сдвинется с места, если коэффициент трения между телами и льдом равен $\mu = 0{,}02$? Столкновения тел абсолютно упругие, размеры тел очень малы. Считать, что количество тел в цепочке очень велико, и $g = 10$ м/с^2. Ответ обосновать.



Поясняющий рисунок: цепочка одинаковых тел в желобе, первому сообщена скорость $\vec{v}_0$

▲ **Решение. Что происходит.** Первое тело скользит, трение его тормозит, оно догоняет второе и упруго с ним сталкивается. Столкновения одинаковых тел — особые: тела меняются скоростями. Поэтому в каждый момент движется ровно одно тело, а все остальные покоятся, и движение похоже на эстафету: скорость переходит от тела к телу, а между ударами её понемногу съедает трение. Главная идея — *эстафету можно считать одним телом*, которое проходит путь S до полной остановки, и посмотреть, сколько тел цепочки лежит на этом пути. Это задача на «столкновения + трение».

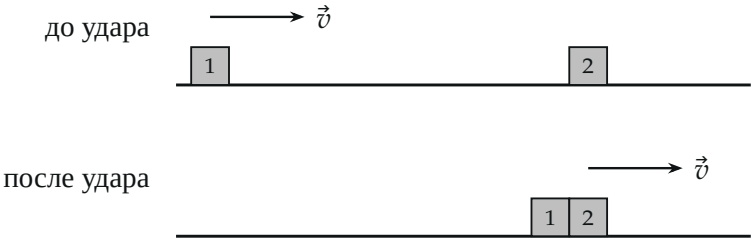
Обозначения. m — масса каждого тела; ось x вдоль желоба в сторону движения, начало — первоначальное место первого тела; $x_k = (k-1)\,l$ — место k-го тела; S — путь, который пройдёт «эстафета» до остановки.

1. Удар одинаковых тел. Пусть тело со скоростью v налетает на покоящееся тело той же массы. За время удара (оно очень мало) трение не успевает изменить импульсы, поэтому для системы двух тел сохраняются импульс и кинетическая энергия (удар упругий). Если после удара

скорости u_1 и u_2, то

$$mv = mu_1 + mu_2, \qquad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

Из первого уравнения $u_2 = v - u_1$, подставим во второе: $v^2 = u_1^2 + (v - u_1)^2$, то есть $u_1\,(u_1 - v) = 0$. Корень $u_1 = v$ означал бы $u_2 = 0$, то есть первое тело пролетело сквозь второе, а этого быть не может. Остаётся $u_1 = 0$, $u_2 = v$: *тела обменялись скоростями* (рисунок ниже).

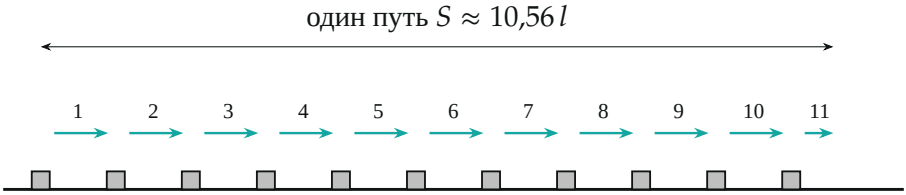


Упругий удар одинаковых тел: первое останавливается, второе уходит с прежней скоростью

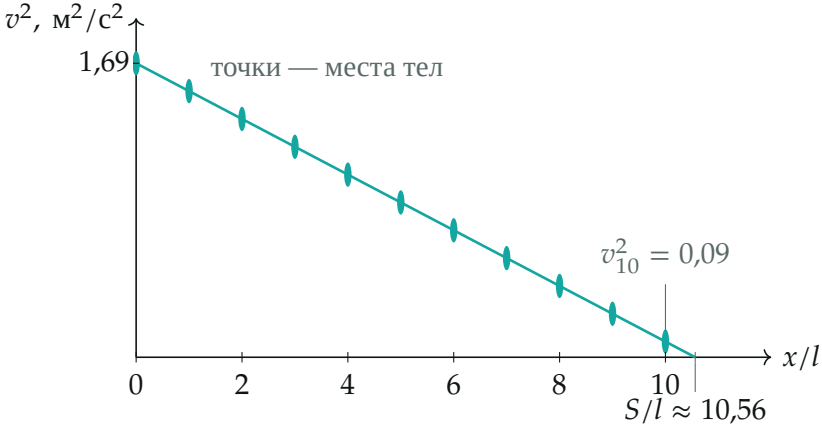
2. «Эстафета» и один путь. После удара первое тело стоит, а второе едет с прежней скоростью, и так дальше: поскольку тела точечные, скорость не теряется в ударах и убывает только от трения. Трение действует лишь на то тело, которое скользит, поэтому торможение идёт так, будто одно и то же тело пробегает путь x по всей цепочке. Для малого пути dx теорема об изменении кинетической энергии движущегося тела даёт $d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = -\mu mg\,dx$. Суммируя от начала до пути x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\,x \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2\mu g\,x.$$

Качественно: путь растёт — квадрат скорости линейно падает, график $v^2(x)$ — прямая. Тело цепочки приходит в движение, когда «эстафета» доходит до его места, то есть пока $v^2 > 0$.



Тело k проходит ровно участок между своим местом и местом следующего; вместе участки дают один путь S



Квадрат скорости «эстафеты» в зависимости от пути в единицах l: точки — места, где тело получает скорость

3. Путь до остановки. Полная остановка там, где $v^2 = 0$:

$$S = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{1{,}3^2}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 10}\ \text{м} \approx 4{,}2\ \text{м}, \qquad \frac{S}{l} = \frac{4{,}225}{0{,}4} \approx 10{,}56.$$

4. Сколько тел в движении. k-й удар происходит на пути $x = kl$ (о тело с номером $k+1$), там скорость «эстафеты»

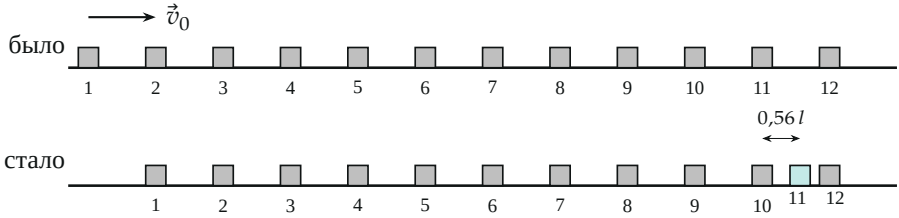
$$v_k = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\, kl} = \sqrt{1{,}69 - 0{,}16\,k}\ \text{м/с}.$$

Тело $k+1$ тронется, если $v_k^2 > 0$, то есть $k < S/l \approx 10{,}56$, значит $k \leq 10$. Проверим границу: $v_{10} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ м/с — десятый удар происходит,

а при $k = 11$ получилось бы $v_{11}^2 = -0{,}07$ — до одиннадцатого удара тело не доезжает. В общем виде

$$n = \left[\frac{S}{l}\right] = \left[\frac{v_0^2}{2\mu g\, l}\right] = [10{,}56] = 10,$$

где $[\ldots]$ — целая часть.



Расположение тел до и после: каждое из тел 1–10 остановилось на месте следующего, одиннадцатое проехало $0{,}56\,l \approx 0{,}23$ м, двенадцатое не тронулось

Обратите внимание. Вопрос «сколько тел сдвинется с места» читают по-разному. От ударов сдвинутся тела со 2-го по 11-е, то есть $n = 10$, и это ответ организаторов. Первое тело «сдвинулось» само, его запустили, и если считать и его, то в движение придут 11 тел. Остановка последнего тела — на расстоянии $S - 10\,l \approx 0{,}23$ м за его прежним местом.

Проверка. Размерность: $v_0^2/(\mu g\, l)$ — $\dfrac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м}}$, безразмерное число, как и должно быть для количества тел. Предельные случаи: $\mu \to 0$ — $n \to \infty$ (без трения тела передают скорость друг другу бесконечно); $v_0 \to 0$ — $n \to 0$ (удара нет). Второй способ — прямой перебор: v_k^2 положительны при $k \leq 10$ и отрицательны при $k = 11$ (последовательность выше). Смысл: лишь то, что «съело» трение на общем пути S, определяет, сколько ударов успеет произойти, а масса тел и их число в цепочке не важны.

Ответ. $n = \left[\dfrac{v_0^2}{2\mu g\, l}\right] = 10$ тел (со 2-го по 11-е, их сдвинули удары). Если считать и первое тело, которому скорость сообщили, — 11.