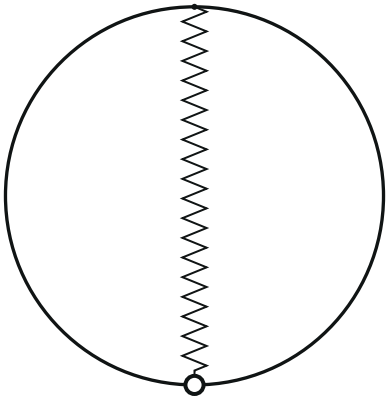
Бусинка на кольце с пружиной

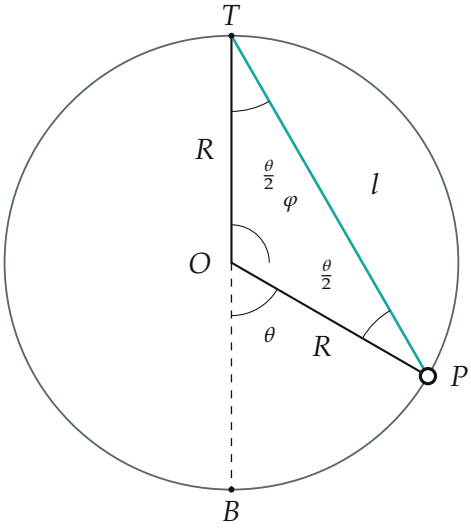
Задача 2. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Из проволоки сделали кольцо радиуса R, расположили в вертикальной плоскости и закрепили в таком положении. К верхней точке кольца прикреплён один конец невесомой пружины. Второй конец пружины прикреплён к массивной бусинке, которая может без трения скользить по кольцу. Если поместить бусинку в нижнюю точку кольца (см. рисунок), она давит на кольцо с силой вдвое превышающей силу её притяжения к Земле. Из-за небольшого смещения бусинка начинает скользить по кольцу, причём её скорость достигает максимума, когда она проходит по кольцу шестую часть его полной длины. Найти длину пружины в недеформированном состоянии.



▲ **Решение. Что происходит.** Бусинка движется по гладкому кольцу под действием трёх сил: тяжести, упругости пружины и реакции кольца. Реакция направлена по радиусу, перпендикулярно движению, и работы не совершает, поэтому бусинку разгоняют и тормозят только *касательные* составляющие тяжести и упругости. Скорость максимальна там, где их сумма проходит через нуль. В условии два сведения: что происходит в нижней точке (первое уравнение для жёсткости k и длины l_0) и где скорость максимальна (второе уравнение). Неизвестная жёсткость уйдёт делением уравнений. Это задача на «положение равновесия + условие максимума скорости».

Обозначения. O — центр кольца, T — верхняя точка (там закреплена пружина), B — нижняя, P — место бусинки; $\theta = \angle BOP$ — её угловое положение; k — жёсткость, l_0 — длина недеформированной пружины, m — масса бусинки. Касательная ось τ идёт по касательной к кольцу в сторону роста θ (вверх по кольцу): реакция кольца на неё не проецируется, поэтому её значение нам не понадобится.

1. Касательные силы в произвольном положении θ. Треугольник OTP равнобедренный ($OT = OP = R$), угол при O равен $\varphi = 180° - \theta$, значит, углы при основании по $\theta/2$. Длина пружины (хорда TP) равна $l = 2R\cos\dfrac{\theta}{2}$, удлинение — $l - l_0$, сила упругости $F = k\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2} - l_0\right)$ (при $F > 0$ пружина тянет бусинку к точке T). Хорда PT образует с радиусом PO угол $\theta/2$, а с касательной — угол $90° - \theta/2$.



Положение бусинки при угле θ (на рисунке $\theta = 60°$): равнобедренный треугольник OTP с углом $\varphi = 180° - \theta$ при вершине

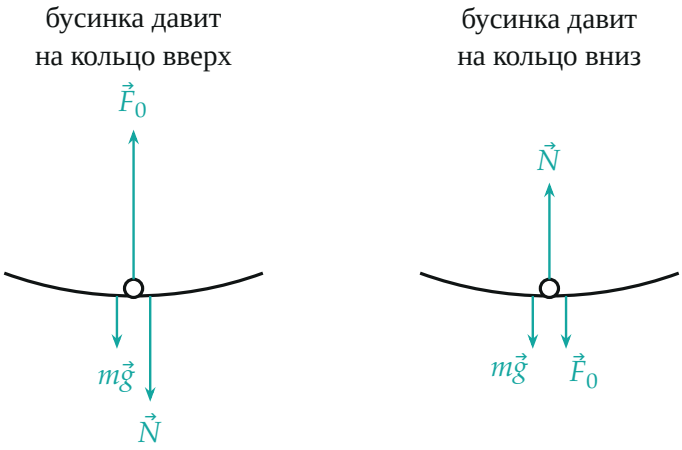
Касательная составляющая упругости равна $F\cos(90° - \theta/2) = F\sin\dfrac{\theta}{2}$ (вверх по кольцу). Угол между радиусом OP и вертикалью равен θ, поэтому касательная составляющая тяжести равна $mg\sin\theta$ и

направлена вниз по кольцу. Сумма касательных сил

$$\begin{aligned} F_\tau(\theta) &= F\sin\frac{\theta}{2} - mg\sin\theta \\ &= \sin\frac{\theta}{2}\left[k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right) - 2mg\cos\frac{\theta}{2}\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Бусинка разгоняется, пока $F_\tau > 0$, а скорость максимальна, когда $F_\tau = 0$.

2. Нижняя точка. В нижней точке $\theta = 0$ бусинка в равновесии: тяжесть $m\vec{g}$, сила упругости $\vec{F}_0$ (пружина вертикальна) и реакция кольца $\vec{N}$, $N = 2mg$ по условию. Возможны два случая: бусинка давит на кольцо вверх (кольцо давит на неё вниз) или давит вниз.



Нижняя точка: слева пружина растянута ($F_0 = 3mg$), справа сжата ($F_0 = mg$, сила направлена вниз)

Какой случай верный, показывает фраза «из-за небольшого смещения бусинка начинает скользить». Подставим в (1) малый угол θ ($\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2} \approx 1$) и $F_0 = k(2R - l_0)$:

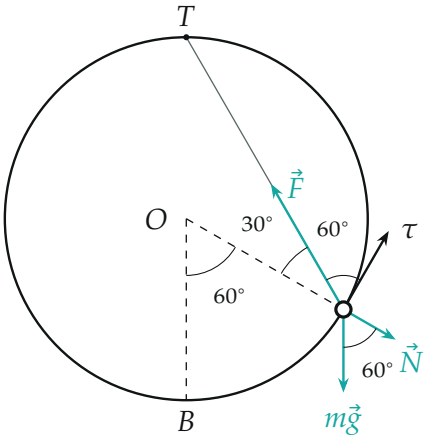
$$F_\tau \approx \frac{\theta}{2}(F_0 - 2mg).$$

Бусинка уходит от нижней точки (а не возвращается к ней) только при $F_0 > 2mg$. Если бы она давила вниз, кольцо подпирало бы её вверх силой $2mg$, и $F_0 + 2mg - mg = 0$ (вверх положительно), то есть $F_0 = -mg$: пружина сжата. Тогда $F_\tau \approx -\frac{3}{2}\, mg\,\theta < 0$, и бусинка вернулась бы вниз: максимума скорости на кольце не было бы. Значит, бусинка давит на кольцо *вверх*: на неё вниз действуют mg и $N = 2mg$, вверх — упругость растянутой пружины, и из равновесия (длина пружины внизу равна диаметру $2R$)

$$F_0 = mg + N = 3mg \quad \Rightarrow \quad k\,(2R - l_0) = 3mg. \tag{2}$$

Знак словами: $3mg > 2mg$, нижняя точка — положение неустойчивого равновесия, бусинка действительно соскальзывает.

3. Максимум скорости. Одна шестая длины кольца — центральный угол $\theta = 360^\circ/6 = 60^\circ$.



Силы, действующие на бусинку при $\theta = 60^\circ$; реакция $\vec{N}$ идёт по радиусу и на касательную ось τ не проецируется

Длина пружины там $l = 2R\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,R$, хорда образует с радиусом угол 30°, с касательной τ — 60°; радиус отклонён от вертикали на 60°, поэтому тяжесть образует с радиусом тоже 60°, с касательной — 30°.

Условие $F_\tau = 0$ в проекции на ось τ (формула (1) при $\theta = 60°$) даёт

$$\begin{aligned} &F\cos 60° - mg\cos 30° = 0, \qquad F = k\left(\sqrt{3}\,R - l_0\right) \\ &\Rightarrow \quad k\left(\sqrt{3}\,R - l_0\right) = \sqrt{3}\,mg. \end{aligned} \tag{3}$$

4. Длина пружины. Разделим уравнение (2) на уравнение (3): жёсткость k сократится, останется одно уравнение для l_0,

$$\frac{2R - l_0}{\sqrt{3}\,R - l_0} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 2R - l_0 = 3R - \sqrt{3}\,l_0,$$

$$l_0\,(\sqrt{3} - 1) = R,$$

откуда

$$l_0 = \frac{R}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\,R \approx 1{,}37\,R.$$

Жёсткость при этом $k = \dfrac{3mg}{2R - l_0} = (3 + \sqrt{3})\,\dfrac{mg}{R} > 0$, как и должно быть.

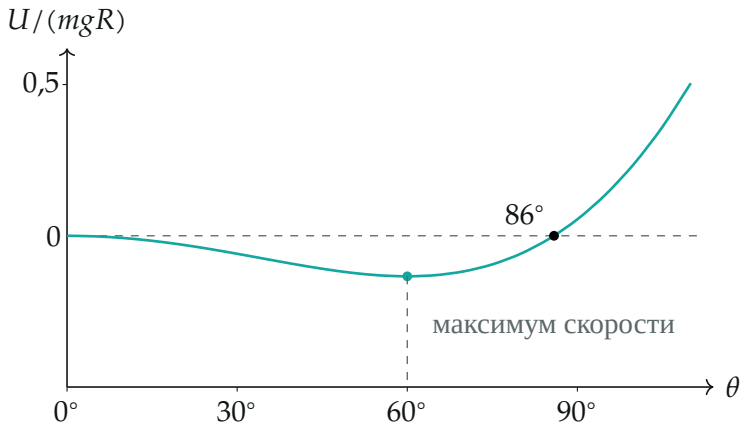
5. Второй способ: энергия. Реакция кольца работы не совершает, поэтому сохраняется сумма потенциальной энергии пружины и тяжести. Отсчитывая высоту от нижней точки, получаем зависимость от угла

$$U(\theta) = \frac{k}{2}\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)^2 + mgR\,(1 - \cos\theta).$$

Скорость максимальна там, где U минимальна, то есть $\dfrac{dU}{d\theta} = 0$:

$$\frac{dU}{d\theta} = R\sin\frac{\theta}{2}\left[2mg\cos\frac{\theta}{2} - k\left(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0\right)\right] = -R\,F_\tau(\theta),$$

то есть то же самое выражение (1) — условие (3) получено вторым способом. Построим график $U(\theta)$ для найденных l_0 и k (по точкам, вычисленным по формуле).



Потенциальная энергия бусинки и пружины: минимум при 60° (скорость максимальна), при ≈ 86° энергия снова равна исходной — там бусинка останавливается и катится назад

Обратите внимание. Реакцию кольца в условиях не нашли и не искали: она перпендикулярна движению, и ось τ выбрана так, чтобы её не было в уравнениях. Главная ловушка — направление давления в нижней точке: из слов «давит с силой $2mg$» одни только числа не дают ответа, нужен ещё факт, что бусинка *соскальзывает* (неустойчивость, $F_0 > 2mg$).

Проверка. Размерность: $l_0 \sim R$, как и должно быть для длины. Знаки: $l_0 \approx 1{,}37R < 2R$ — пружина внизу растянута, как предположено в (2); $l_0 < \sqrt{3}R \approx 1{,}73R$ — и в точке P она ещё растянута, как предположено в (3). Второй способ — через минимум $U(\theta)$ — даёт то же условие; численный перебор минимума U при найденных l_0 и k даёт $\theta = 60{,}0°$. Согласованность: по закону сохранения энергии в точке P имеем $mv^2 = 2\,(U(0) - U(60°)) = (2 - \sqrt{3})\,mgR$, и второй закон Ньютона вдоль радиуса даёт реакцию $N = (\sqrt{3} - 1)\,mg$, направленную от центра (так и нарисовано). Смысл: пружина «хочет» собраться, но тяжесть и геометрия кольца ограничивают разгон, и баланс этих двух касательных сил на 60° определяет единственную длину l_0.

Ответ. $l_0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\,R \approx 1{,}37\,R.$