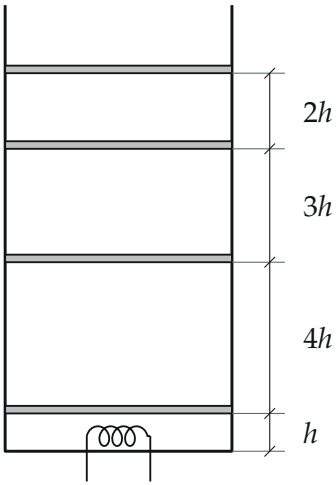
Четыре поршня в сосуде

Задача 3. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 3] В открытом вертикальном цилиндрическом сосуде с одноатомным идеальным газом находятся четыре одинаковых тонких массивных подвижных поршня массой m каждый. Расстояния между поршнями и между нижним поршнем и дном сосуда равны h, $2h$, $3h$ и $4h$ (см. рисунок). В некоторый момент времени включается нагреватель, расположенный между дном сосуда и нижним поршнем, и медленно сообщает газу количество теплоты Q. На сколько сместится верхний поршень, если поршни (за исключением верхнего) проводят тепло, стенки сосуда и верхний поршень тепло не проводят, теплоёмкостью сосуда и поршней можно пренебречь. Атмосферное давление отсутствует.

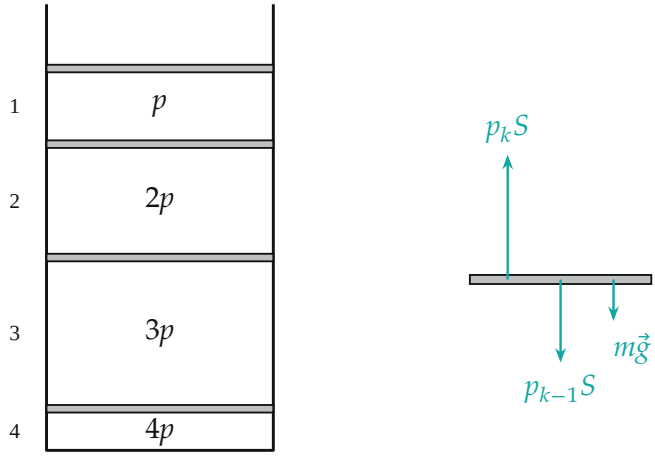


▲ **Решение.** **Что происходит.** Нагреватель греет газ в нижнем отсеке, а поршни проводят тепло, поэтому оно по цепочке доходит до верхних отсеков, и температура всего газа растёт одинаково (стенки и верхний поршень тепло не пропускают). Нагрев медленный: каждый поршень в любой момент находится в равновесии, его вес не меняется, значит, *давление в каждом отсеке постоянно* — газ в каждом отсеке расширяется изобарно, а совершённая им работа идёт на подъём поршней. Главная

идея: при изобаре $V \propto T$, а T одинакова, поэтому все отсеки расширяются в одно и то же число раз — отсюда относительные смещения поршней; потом первым законом термодинамики для каждого отсека связываем Q со смещением. Это задача на «несколько изобарных процессов с общей температурой».

Обозначения. Ось вертикально вверх. Отсеки нумеруем сверху вниз: отсек 1 лежит под верхним поршнем (по рисунку его высота $2h$), отсек 2 — $3h$, отсек 3 — $4h$, отсек 4 — h у дна; поршень k лежит над отсеком k. S — площадь сечения сосуда, p_k, V_k — давление и объём газа в отсеке k, $p = mg/S$, x — смещение нижнего поршня, $\varepsilon = \Delta T/T$ — относительный нагрев (общий для газа во всех отсеках).

1. Давление в отсеках. Запишем условие равновесия поршня k в проекции на ось вверх: снизу газ отсека k давит вверх с силой $p_k S$, сверху газ отсека $k-1$ давит вниз с силой $p_{k-1}S$, вниз же действует тяжесть mg (рисунок справа):



Слева: давления в отсеках, справа: силы на поршень (для $k = 3$ длины стрелок в масштабе, $mg = pS$)

$$p_k S - p_{k-1}S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = p_{k-1} + \frac{mg}{S}.$$

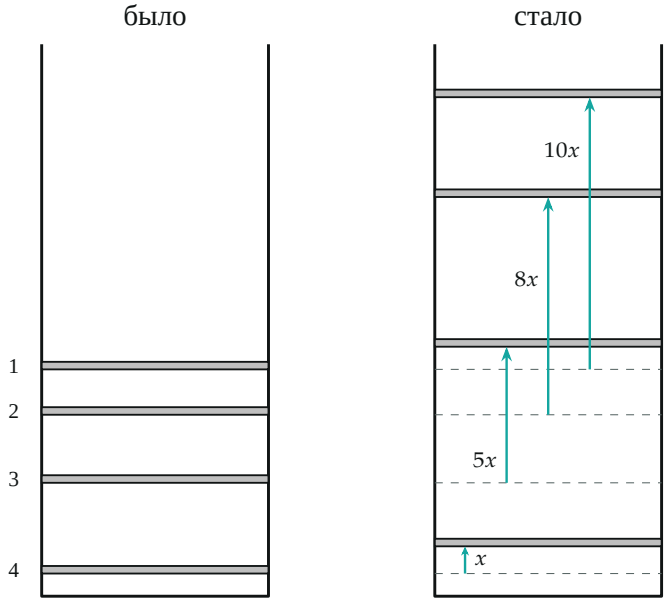
Над верхним поршнем атмосферного давления нет, $p_0 = 0$, поэтому $p_1 = p$, $p_2 = 2p$, $p_3 = 3p$, $p_4 = 4p$. Нагрев медленный, веса поршней

не меняются, значит, эти давления остаются прежними в течение всего процесса.

2. Объёмы и смещения поршней. До нагревания $V_1 = 2hS$, $V_2 = 3hS$, $V_3 = 4hS$, $V_4 = hS$. В каждом отсеке процесс изобарный, $V/T = \text{const}$, а температура всех отсеков изменяется одинаково, поэтому все объёмы умножаются на один и тот же множитель $1 + \varepsilon$: $\Delta V_k = \varepsilon V_k$, и приращения объёмов относятся так же, как сами объёмы,

$$\Delta V_1 : \Delta V_2 : \Delta V_3 : \Delta V_4 = 2 : 3 : 4 : 1.$$

Пусть нижний поршень поднялся на x, то есть высота отсека 4 выросла на x. Тогда высоты отсеков 3, 2, 1 выросли на $4x$, $3x$, $2x$. Смещение Δ_k поршня k равно сумме приростов высот отсеков под ним: поршень 4 — $\Delta_4 = x$, поршень 3 — $\Delta_3 = x + 4x = 5x$, поршень 2 — $\Delta_2 = 5x + 3x = 8x$, верхний поршень 1 — $\Delta_1 = 8x + 2x = 10x$.



Положение поршней до и после нагревания (расширение на рисунке преувеличено, $\varepsilon = 1{,}2$); пунктир — прежние положения, стрелки — смещения

3. Теплота. Нагреватель отдаёт теплоту только газу (стенки и верхний поршень адиабатны, теплоёмкостью сосуда и поршней пренебрегаем), поэтому $Q = \sum Q_k$ — сумма теплот, полученных газом всех четырёх отсеков. Для отсека k запишем первый закон термодинамики: $Q_k = \Delta U_k + A_k$. При изобарном процессе $p_k \Delta V_k = \nu_k R \Delta T$, для одноатомного газа $\Delta U_k = \frac{3}{2} \nu_k R \Delta T = \frac{3}{2} p_k \Delta V_k$ и $A_k = p_k \Delta V_k$, значит,

$$Q_k = \frac{5}{2} p_k \Delta V_k.$$

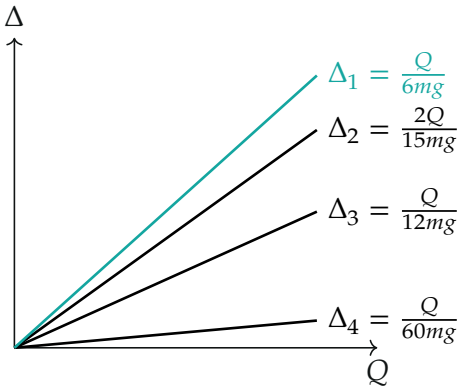
Подставим давления из пункта 1 и приращения объёмов $\Delta V_k = S \cdot (2x,\ 3x,\ 4x,\ x)$ из пункта 2:

$$Q = \frac{5}{2} pSx\,(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1) = \frac{5}{2} pSx \cdot 24 = 60\, mg\, x,$$

так как $pS = mg$. Отсюда $x = \dfrac{Q}{60\, mg}$. Знак словами: газ получает теплоту и расширяется, все поршни поднимаются.

4. Смещение верхнего поршня. Верхний поршень поднялся на $\Delta_1 = 10x$:

$$\Delta x_{\text{верх}} = 10x = \frac{Q}{6\, mg}.$$

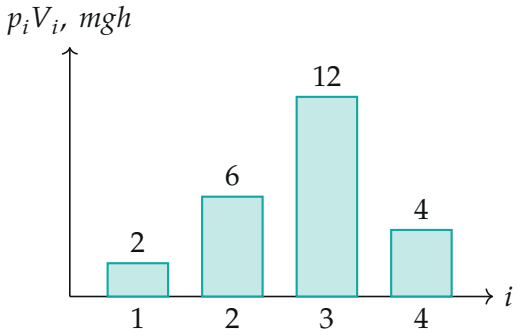


Смещения поршней растут пропорционально Q

5. Второй способ: через температуру. Из уравнения Клапейрона — Менделеева для отсека k имеем $p_kV_k = \nu_k RT$, то есть p_kV_k пропорциональны количествам вещества. Тогда $p_kV_k = p \cdot (2,\,6,\,12,\,4) \cdot hS = (2,\,6,\,12,\,4)\,mgh$ (рисунок), а вся энергия газа и вся полученная теплота записываются через общее ε:

$$Q = \frac{5}{2}\sum \nu_k R\,\Delta T = \frac{5}{2}\,\varepsilon \sum p_kV_k = \frac{5}{2}\,\varepsilon \cdot 24\,mgh = 60\,mgh\,\varepsilon.$$

Верхний поршень поднимается на $\varepsilon\,(2h + 3h + 4h + h) = 10h\varepsilon$, откуда $\Delta x_{\text{верх}} = 10h \cdot \dfrac{Q}{60\,mgh} = \dfrac{Q}{6\,mg}$ — тот же ответ.



Вклад отсеков: p_iV_i в единицах mgh (пропорционально числу молей газа в отсеке); сумма 24 даёт $Q = 60\,mgh\,\varepsilon$

Обратите внимание. Формула $Q_k = \dfrac{5}{2}p_k\Delta V_k$ применяется к каждому отсеку со своим давлением — давления разные (p, $2p$, $3p$, $4p$), поэтому нельзя подставить в неё общее давление и общее приращение объёма. И второе: одинаковый нагрев ε в отсеках возможен только потому, что поршни проводят тепло. И третье: в тексте условия расстояния перечислены как h, $2h$, $3h$, $4h$, а на рисунке сверху вниз стоят $2h$, $3h$, $4h$, h; решаем по рисунку, как и организаторы. Если бы снизу вверх шли h, $2h$, $3h$, $4h$, сумма $\sum p_kV_k$ была бы $20\,mgh$ и ответ — $Q/(5mg)$, так что порядок важен.

Проверка. Размерность: $Q/(mg)$ — джоуль на ньютон, метр, как и должно быть для смещения. Энергетический баланс: внутренняя энер-

гия газа выросла на $\frac{3}{2}\sum p_k\Delta V_k = \frac{3}{2}\cdot 24\,mgx = 36\,mgx$, потенциальная энергия поршней — на $mg\,(x + 5x + 8x + 10x) = 24\,mgx$ (это ровно работа газа $\sum p_k\Delta V_k = 24\,mgx$: газ целиком тратит её на подъём поршней), сумма $36\,mgx + 24\,mgx = 60\,mgx = Q$ — совпало с пунктом 3. Смысл: на подъём верхнего поршня нужно $Q = 6\,mg\,\Delta x_{\text{верх}}$ теплоты — в 2,4 раза больше, чем при нагреве газа под одним поршнем ($\frac{5}{2}\,mg\,\Delta x$), потому что греются ещё три отсека.

Ответ. $\Delta x_{\text{верх}} = \dfrac{Q}{6\,mg}$ (вверх).