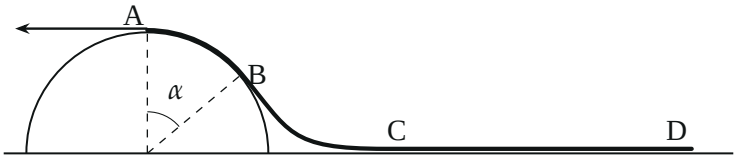
Верёвка на полушаре

Задача 4. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Однородную нерастяжимую верёвку, лежащую на горизонтальной поверхности, медленно втягивают на гладкий полушар, закреплённый на поверхности, действуя на её конец некоторой силой. Когда конец верёвки A оказывается в верхней точке полушара, верёвка касается полушара участком AB, опирающимся на угол α, а длина «висящего» участка верёвки BC втрое меньше её участка CD, лежащего на поверхности (см. рисунок). Найти коэффициент трения между верёвкой и поверхностью. Какой горизонтальной силой нужно в этот момент действовать на конец верёвки A, если масса верёвки m, масса куска CD — m_{CD}?



▲ **Решение. Что происходит.** Верёвку втягивают медленно, поэтому сумма сил на любом её куске равна нулю, а на лежащей части трение скольжения максимально, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Три куска верёвки — три разных условия. Висящий кусок BC на концах имеет только натяжения (в B верёвка уходит на полушар по касательной, в C ложится на поверхность горизонтально) и тяжесть: это связывает натяжения T_B, T_C с его весом и углом α. Лежащий кусок CD держится трением: из него получается μ. Кусок AB на *гладком* полушаре: вдоль верёвки действуют только натяжения и тяжесть, поэтому натяжение вдоль AB меняется лишь из-за веса верёвки, и отсюда находится F. Это задача на «равновесие нерастяжимой верёвки по кускам».

Обозначения. λ — масса единицы длины верёвки (верёвка однородна), m_1 — масса куска BC, $m_2 = m_{CD}$ — масса куска CD, m_{AB} — масса куска AB, R — радиус полушара, O — его центр; T_B, T_C — натяжения верёвки в точках B, C (в каждой точке нерастяжимой верёвки натяжение одно, соседние куски действуют друг на друга с равными сила-

ми). Длина BC втрое меньше длины CD, верёвка однородна, поэтому $m_1 = \dfrac{m_{CD}}{3}$.

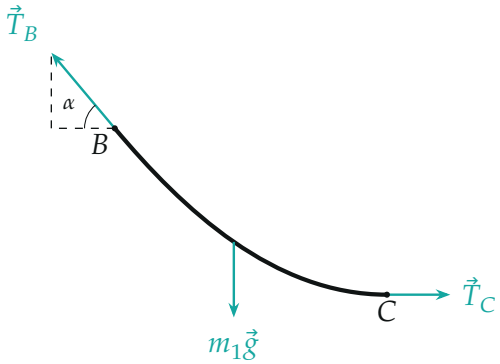
1. Висящий кусок BC. Радиус OB отклонён от вертикали на угол α, значит, касательная к полушару в точке B наклонена к горизонтали на тот же угол α: в точке B натяжение $\vec{T}_B$ направлено вдоль этой касательной вверх. В точке C верёвка касается горизонтальной поверхности, натяжение $\vec{T}_C$ горизонтально. Форма провисающего куска нам не нужна: на него действуют только эти две силы и тяжесть $m_1\vec{g}$, равновесие определяют они. Запишем условие равновесия куска BC в проекциях на вертикаль и горизонталь:

$$T_B \sin\alpha - m_1 g = 0, \qquad T_B \cos\alpha - T_C = 0.$$

Отсюда

$$T_B = \frac{m_1 g}{\sin\alpha} = \frac{m_{CD} g}{3\sin\alpha}, \qquad T_C = m_1 g \operatorname{ctg}\alpha = \frac{m_{CD} g}{3}\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (1)$$

В официальном решении здесь опечатка: $T_B = \dfrac{m_{CD} g}{3\cos\alpha}$; верно $\sin\alpha$ — вертикальная составляющая $T_B \sin\alpha$ держит вес $m_1 g$, и в итоговой формуле организаторов стоит уже $\sin\alpha$.



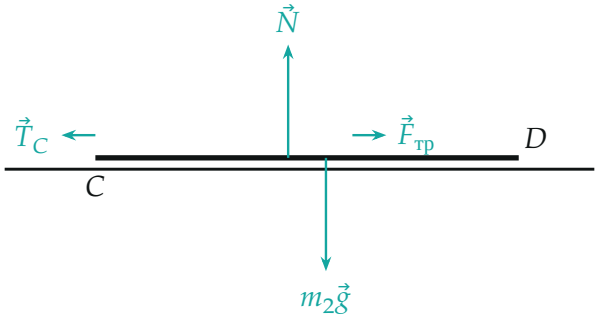
Силы на висящий кусок BC (при $\alpha = 50°$): вертикальная составляющая T_B уравновешивает $m_1 g$, горизонтальная равна T_C

2. Лежащий кусок CD и коэффициент трения. На него действуют: натяжение $\vec{T}_C$ в точке C (оно тянет кусок к полушару), тяжесть $m_2\vec{g}$, реакция поверхности $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Верёвку втягивают, она скользит, поэтому трение максимально, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Проекции равновесия куска CD:

$$N = m_2 g, \qquad T_C = \mu N.$$

Подставим T_C из (1) и $m_2 = m_{CD}$:

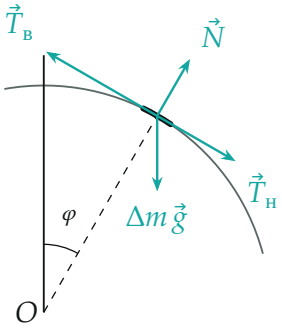
$$\mu = \frac{T_C}{m_{CD}\, g} = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$



Силы на лежащий кусок CD: трение уравновешивает натяжение T_C, реакция опоры — вес

3. Участок AB на полушаре. Разобьём его на малые элементы длиной Δl и массой $\Delta m = \lambda\, \Delta l$. Возьмём элемент, радиус к которому образует с вертикалью угол φ (рисунок). На него действуют тяжесть $\Delta m\, \vec{g}$, реакция полушара $\vec{N}$ (по радиусу: полушар гладкий) и натяжения верёвки $\vec{T}_{\text{в}}$ (сверху, в сторону A) и $\vec{T}_{\text{н}}$ (снизу, в сторону B), направленные по касательной. Запишем второй закон Ньютона (равновесие) в проекции на ось вдоль касательной в сторону A: реакция $\vec{N}$ на неё не проецируется, и трения нет, остаются только натяжения и тяжесть. Угол между $\Delta m\, \vec{g}$ и радиусом равен φ, поэтому проекция тяжести на касательную — $\Delta m\, g \sin\varphi$ (вниз по склону):

$$T_{\text{в}} - T_{\text{н}} - \Delta m\, g \sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{в}} - T_{\text{н}} = \Delta m\, g \sin\varphi.$$



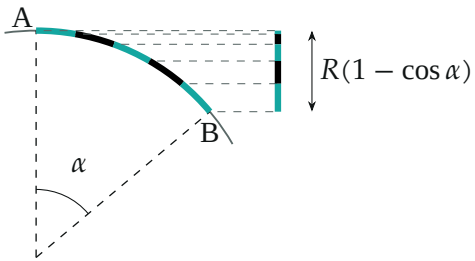
Элемент верёвки на полушаре: натяжение сверху больше, чем снизу, на $\Delta m\, g \sin\varphi$

Сложим такие равенства для всех элементов от B до A. Натяжение, действующее на элемент снизу, равно натяжению, действующему на соседний нижний элемент сверху, поэтому все внутренние натяжения сокращаются, и остаётся разность натяжений на концах участка: в точке A это искомая сила F, в точке B — T_B:

$$F - T_B = g\sum \Delta m \sin\varphi = \lambda g \sum \Delta l \, \sin\varphi.$$

Слагаемое $\Delta l \sin\varphi$ — вертикальная проекция элемента, ведь касательная наклонена к горизонтали на угол φ (рисунок). Сумма вертикальных проекций всех элементов равна вертикальной проекции всей дуги AB, то есть разности высот точек A и B: $R - R\cos\alpha$. Поэтому

$$F = T_B + \lambda g R\,(1 - \cos\alpha).$$



Вертикальные проекции $\Delta l \sin\varphi$ *элементов складываются в одну проекцию* $R(1-\cos\alpha)$ *всей дуги* AB

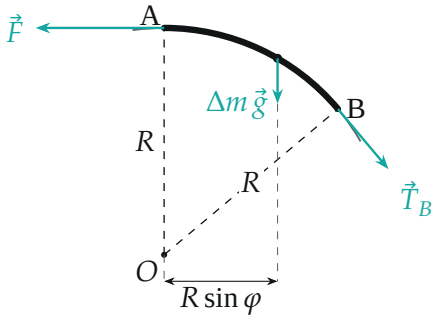
4. Выражаем через массы. Длина дуги AB равна $R\alpha$ (угол α — в радианах), поэтому $m_{AB} = \lambda R\alpha$ и $\lambda R = \dfrac{m_{AB}}{\alpha}$. Масса куска AB — это то, что осталось от верёвки:

$$m_{AB} = m - m_{CD} - m_1 = m - m_{CD} - \frac{m_{CD}}{3} = \frac{3m - 4m_{CD}}{3}.$$

Подставим это и T_B из (1):

$$F = T_B + \frac{m_{AB}\, g\,(1 - \cos\alpha)}{\alpha} = \frac{m_{CD}\, g}{3\sin\alpha} + \frac{(3m - 4m_{CD})\, g\,(1 - \cos\alpha)}{3\alpha}.$$

5. Второй способ: моменты сил относительно центра O**.** Условие равновесия куска AB можно записать, не говоря о натяжениях внутри него: сумма моментов сил относительно оси через O равна нулю. Реакции полушара направлены по радиусам, их линии действия проходят через O и моментов не дают. Сила $\vec{F}$ приложена в точке A горизонтально, плечо — R (расстояние от O до горизонтали через A). Сила $\vec{T}_B$ идёт по касательной в точке B, плечо — тоже R. Тяжесть элемента — вертикальна, плечо — $R\sin\varphi$. Моменты $\vec{F}$ (против часовой стрелки на рисунке) и сил $\vec{T}_B$ и тяжести (по часовой) уравновешены:



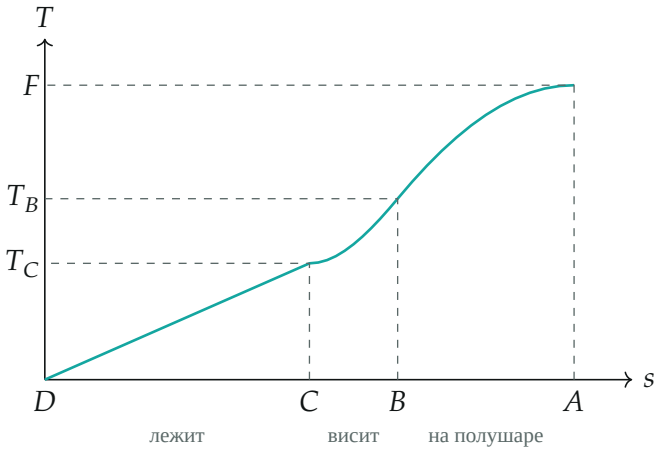
Плечи сил относительно O: R у $\vec{F}$ и $\vec{T}_B$, $R\sin\varphi$ у тяжести элемента; реакции полушара моментов не дают

$$FR - T_B R - \sum \Delta m\, g\, R\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad F = T_B + \lambda g \sum \Delta l \sin\varphi,$$

$$F = T_B + \lambda g R\,(1 - \cos\alpha),$$

это тот же результат, что и выше.

6. Как растёт натяжение вдоль верёвки. Идя от свободного конца D к концу A, натяжение только растёт: на CD оно линейно поднимается от нуля до T_C (трение распределено по длине), на BC растёт, потому что добавляется вес верёвки, на AB — от T_B до F. Для примера $m = 2m_{CD}$, $\alpha = 50°$ график построен по формулам выше.



Натяжение вдоль верёвки (пример: $m = 2m_{CD}$, $\alpha = 50°$; s — длина вдоль верёвки от конца D в долях длины CD, T — в долях $m_{CD}g$)

Обратите внимание. Форму висящего куска BC находить не нужно, и заменять его прямой хордой нельзя: в точке B верёвка идёт по касательной (угол α), в точке C — горизонтально, а между ними она провисает кривой. И угол α в формулах длины дуги ($R\alpha$) надо брать в радианах, а в $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — как есть. Предполагается, что верёвка прилегает к полушару, как нарисовано: давление на полушар вдоль AB равно $\lambda(g\cos\alpha - T_B/(\lambda R))$ на единицу длины и положительно при $T_B < \lambda g R\cos\alpha$.

Проверка. Размерность: μ безразмерен (отношение масс на $\operatorname{ctg}\alpha$), F — сила (mg, λgR и $m_{AB}g/\alpha$ — силы). Предельные случаи: при $\alpha \to 90°$ кусок BC висит вертикально, горизонтальной силе в C взяться неоткуда, $\operatorname{ctg}\alpha \to 0$, $\mu \to 0$ — верно, а $T_B \to m_1 g$ — вес куска. При $\alpha \to 0$ верёвка

почти не огибает полушар, T_B и μ неограниченно растут: чтобы удержать почти горизонтальный висящий кусок, нужно большое натяжение. Масса $m_{AB} > 0$ требует $3m > 4m_{CD}$. Численная проверка: разбиение дуги AB на 10^5 элементов и суммирование $T_{\text{в}} - T_{\text{н}}$ даёт ту же F, что и формула (для $m = 2m_{CD}$, $\alpha = 50°$: $F \approx 0{,}708\, m_{CD} g$), а два способа (натяжения и моменты) совпадают.

Ответ. $\mu = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}\alpha$; $F = \dfrac{m_{CD} g}{3\sin\alpha} + \dfrac{(3m - 4m_{CD})\, g\,(1 - \cos\alpha)}{3\alpha}$ (α — в радианах).