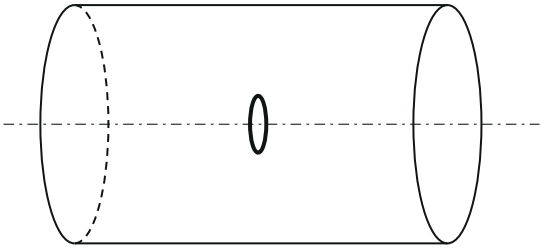
Колечко внутри заряженного цилиндра

Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Из гибкого диэлектрика изготовили длинный тонкостенный цилиндр радиуса R и равномерно зарядили его положительным зарядом с поверхностной плотностью σ. Внутрь цилиндра перпендикулярно его оси вставили диэлектрическое колечко радиуса r и массой m, центр которого совпадает с осью цилиндра и которое заряжено положительным зарядом с линейной плотностью заряда λ. Цилиндр раскручивают до угловой скорости ω. Найти угловую скорость колечка.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряженный цилиндр вращается — значит, его заряды бегут по окружностям, то есть это круговые токи, и цилиндр работает как соленоид: внутри него появляется однородное магнитное поле вдоль оси. Пока цилиндр раскручивают, это поле растёт, а меняющееся магнитное поле порождает *вихревое электрическое поле* (закон электромагнитной индукции Фарадея): его линии — окружности вокруг оси. Это поле действует на заряды колечка и раскручивает колечко. Главная идея: ускорение колечка пропорционально скорости изменения угловой скорости цилиндра, поэтому после суммирования по всей раскрутке угловая скорость колечка пропорциональна ω; направление даёт правило Ленца. Это задача на цепочку «магнитное поле токов → индукция → механика».

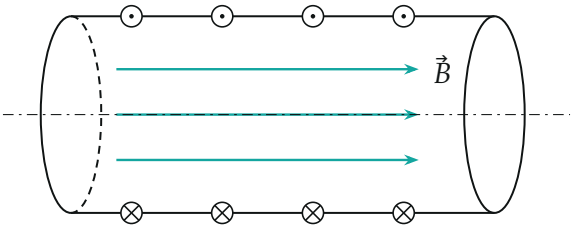
Обозначения. Ось x — ось цилиндра; $\omega(t)$ — его текущая угловая скорость (от нуля до ω), $B(t)$ — индукция поля внутри; $q = 2\pi r\lambda$ — заряд колечка; $\omega_к$ — угловая скорость колечка; положительным считаем

направление вращения цилиндра. Считаем цилиндр достаточно длинным, а собственное магнитное поле колечка и его самоиндукцию — пренебрежимо малыми.

1. Магнитное поле внутри. Точка боковой поверхности цилиндра движется со скоростью $v = \omega R$. Через единицу длины образующей в единицу времени переносится заряд $\sigma v = \sigma\omega R$ — это ток на единицу длины, как nI у соленоида. Для длинного соленоида $B = \mu_0 nI$, поэтому внутри цилиндра поле однородно, направлено вдоль оси и

$$B = \mu_0 \sigma R\, \omega.$$

Вне цилиндра поле пренебрежимо мало.

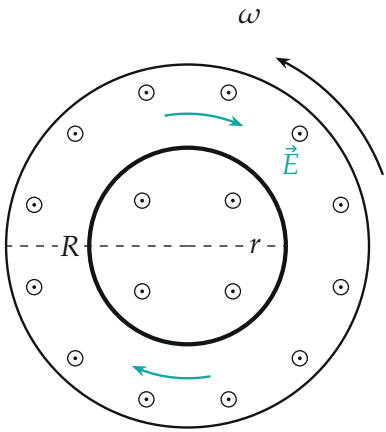


Заряды вращающегося цилиндра создают ток на боковой поверхности: точка — ток к нам, крест — от нас; внутри поле $\vec{B}$ однородно, направлено вдоль оси (вращение $\vec{\omega}$ тоже вправо)

2. Вихревое электрическое поле. Пока цилиндр раскручивают, ω растёт, а вместе с ним растёт B: за малое время Δt поле меняется на $\Delta B = \mu_0 \sigma R\, \Delta\omega$. Возьмём контур — окружность радиуса r с центром на оси в плоскости колечка (там, где лежит колечко). Магнитный поток через него $\Phi = B\,\pi r^2$ (поле внутри цилиндра однородно). По закону электромагнитной индукции ЭДС в контуре равна скорости изменения потока, а работа вихревого поля над единичным зарядом при обходе контура — это и есть ЭДС. Из симметрии E зависит только от расстояния до оси и направлено по касательной к окружности, поэтому циркуляция равна $E \cdot 2\pi r$:

$$E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{r}{2}\,\mu_0 \sigma R\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Направление — по правилу Ленца: вихревое поле направлено так, чтобы ток в контуре создавал поле против роста B. У положительно заряженного цилиндра ток идёт по вращению, значит, $\vec{E}$ направлено *против* вращения цилиндра.

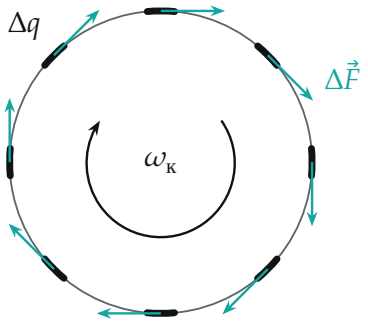


Вид вдоль оси (поле $\vec{B}$ направлено к нам, точки): цилиндр раскручивается против часовой стрелки (ω), вихревое поле $\vec{E}$ идёт по часовой стрелке по окружностям вокруг оси

3. Движение колечка. Колечко диэлектрическое, его заряды не бегут по нему, а увлекают его за собой. Разобьём колечко на малые элементы с зарядами Δq и массами $\Delta m = \dfrac{m}{q}\Delta q$ (заряд и масса распределены по колечку равномерно). Запишем второй закон Ньютона для элемента в проекции на касательную к колечку: силе $\Delta F = \Delta q\, E(r)$ соответствует ускорение

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{q}{m}E(r) = \frac{q\,r}{2m}\mu_0\sigma R\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Оно одинаково у всех элементов, поэтому колечко раскручивается целиком, как твёрдое тело.

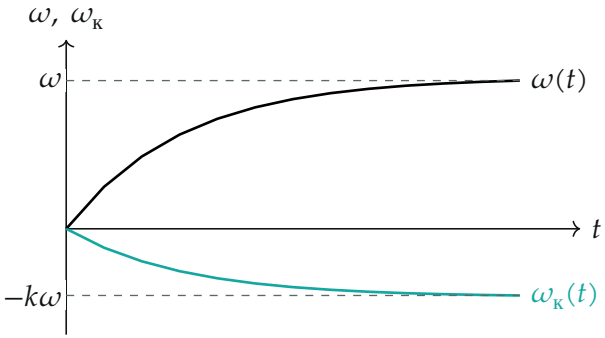


Колечко (вид вдоль оси): на каждый элемент действует касательная сила $\Delta\vec{F} = \Delta q\,\vec{E}$, все силы направлены одинаково, по часовой стрелке

4. Угловая скорость колечка. Умножим ускорение на малый промежуток времени, получим приращение скорости точек колечка $\Delta v = a\,\Delta t = \dfrac{q\,r}{2m}\,\mu_0\sigma R\,\Delta\omega$, и сложим приращения за всё время раскрутки, от начала (колечко и цилиндр покоились) до момента, когда угловая скорость цилиндра стала ω:

$$v_к = \frac{q\,r}{2m}\,\mu_0\sigma R\,\omega, \qquad \omega_к = \frac{v_к}{r} = \frac{\mu_0\sigma R\,q}{2m}\,\omega = \frac{\pi\mu_0\,\sigma R\,r\lambda}{m}\,\omega,$$

так как $q = 2\pi r\lambda$. Знак: направление — против вращения цилиндра (рисунок выше), то есть в выбранной системе $\omega_к = -k\,\omega$, где $k = \dfrac{\mu_0\sigma R\,q}{2m} > 0$.



Угловые скорости цилиндра и колечка $\omega_к = -k\omega$ во время раскрутки (на рисунке $k = 0{,}45$)

5. Второй способ: момент сил. Работа вихревого поля над единичным зарядом при обходе колечка — ЭДС, по модулю $\mathcal{E} = \pi r^2 \dfrac{dB}{dt}$. Все элементы колечка тянутся по касательной в одну сторону, поэтому суммарный момент сил относительно оси $M = \sum \Delta q\, E r = q E r = \dfrac{q\mathcal{E}}{2\pi}$. Момент инерции колечка равен mr^2, уравнение моментов для вращения даёт

$$mr^2 \frac{d\omega_к}{dt} = \frac{q}{2\pi} \cdot \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_к}{dt} = \frac{q}{2m}\frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad |\omega_к| = \frac{q}{2m} B,$$

где сложены приращения от нуля до конечного $B = \mu_0 \sigma R\, \omega$. Это тот же ответ, а в векторном виде $\vec{\omega}_к = -\dfrac{q}{2m}\vec{B}$ — известная частота Лармора: вектор угловой скорости колечка направлен против вектора $\vec{B}$, то есть колечко вращается против вращения цилиндра.

Обратите внимание. Заряды на цилиндре создают ещё и статическое электрическое поле, но внутри длинного заряженного цилиндра оно равно нулю (теорема Гаусса), поэтому колечко раскручивает *только* вихревое поле. Движущееся колечко чувствует и магнитную силу $q\vec{v} \times \vec{B}$, но она направлена по радиусу (колечко слегка растягивается или сжимается), скорость вдоль колечка не меняет и в уравнение не входит.

Проверка. Размерность: $\mu_0 \sigma R\, q/m$ — $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл}^{-2} \cdot \text{Кл}\,\text{м}^{-2} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл}}{\text{кг}} =$ 1, безразмерно, как и должно быть для отношения $\omega_к/\omega$. Пределы: $\sigma \to 0, \lambda \to 0$ или $m \to \infty$ — $\omega_к \to 0$ (колечко не раскручивается). При заданном заряде q угловая скорость не зависит от r: E растёт как r, зато момент инерции — как r^2. Смысл: колечко получает вращение за счёт того, что вихревое поле при нарастании B толкает заряды в сторону, обратную вращению цилиндра.

Ответ.

$$\omega_к = \frac{\mu_0 \sigma R\, q}{2m}\,\omega = \frac{\pi \mu_0\, \sigma R\, r\lambda}{m}\,\omega, \qquad q = 2\pi r\lambda;$$

колечко вращается в сторону, противоположную вращению цилиндра.