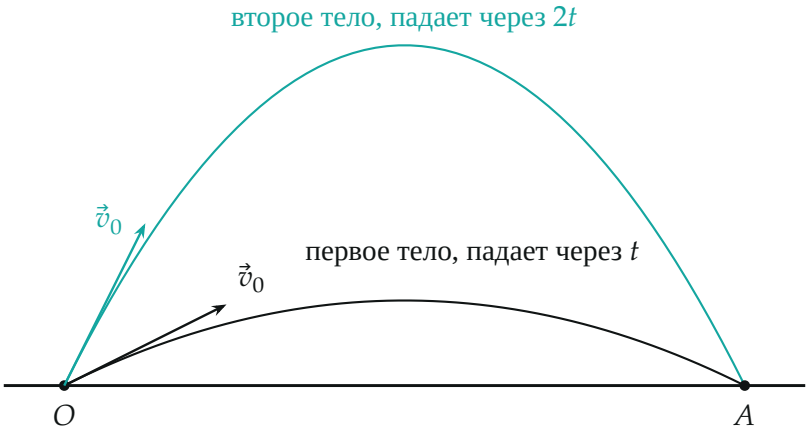
Два броска в одну точку

Задача 1. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Два тела бросили из одной точки поверхности земли с одинаковыми начальными скоростями под разными углами к горизонту. Тела упали в одну и ту же точку через время t и $2t$ после броска. Под каким углом к горизонту бросили первое тело?



Поясняющий рисунок: тела брошены из точки O с одинаковыми по модулю скоростями под разными углами и упали в одну точку A

▲ **Решение. Что происходит.** Это движение тела, брошенного под углом к горизонту: по горизонтали скорость не меняется, по вертикали тело движется с ускорением g (сопротивления воздуха нет). Скорости у тел одинаковые, углы разные, а падают они в одну точку. Главная идея: при одной и той же скорости дальность полёта совпадает только у двух углов, дополняющих друг друга до 90°, а времена полёта при таких углах различаются — по их отношению и найдём угол.

Обозначения. v_0 — начальная скорость каждого тела; α и β — углы броска первого и второго тела к горизонту; T — время полёта; l — расстояние от точки броска до точки падения. Начало отсчёта — точка броска, ось x направлена по горизонтали к точке падения, ось y — вертикально вверх. Зачем так: ускорение направлено вдоль $-y$, а вдоль x скорость постоянна.

1. Время полёта. Тело брошено под углом φ, начальная скорость имеет вертикальную проекцию $v_0 \sin\varphi$. Запишем закон движения вдоль y:

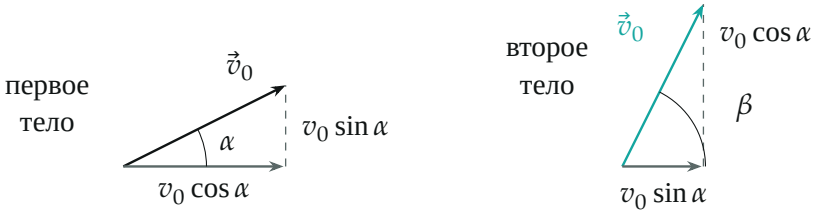
$$y = v_0 \sin\varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тело падает на землю, когда $y = 0$ (кроме момента броска $t = 0$):

$$T = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g}.$$

2. Дальность полёта. Вдоль x скорость постоянна и равна $v_0 \cos\varphi$, поэтому за время T тело пролетит

$$l = v_0 \cos\varphi \cdot T = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

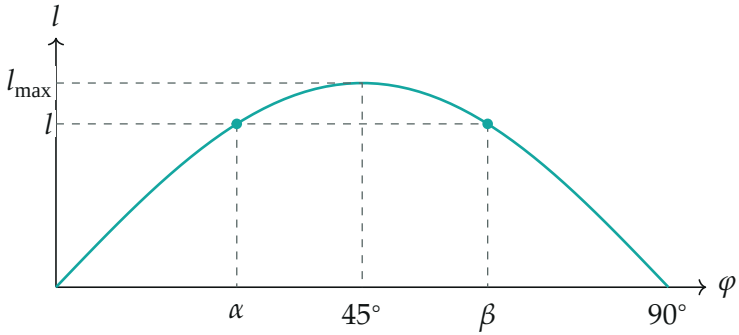


Проекции начальных скоростей: векторы одинаковой длины, горизонтальная проекция одного тела равна вертикальной проекции другого

3. Равные дальности. По условию v_0 и l у тел одинаковые, значит $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Это возможно в двух случаях: $2\beta = 2\alpha$ или $2\beta = 180° - 2\alpha$. Первый случай означает, что углы одинаковы и тела летят по одной траектории, а по условию времена полёта разные. Остаётся

$$\beta = 90° - \alpha.$$

Тело с меньшим временем полёта брошено под меньшим углом (по пункту 1 T растёт с φ), поэтому $\alpha < 45° < \beta$.



Дальность $l(\varphi)$ при фиксированной скорости ($l_{max} = v_0^2/g$): график симметричен относительно 45°, одну и ту же дальность дают углы α и $\beta = 90° - \alpha$

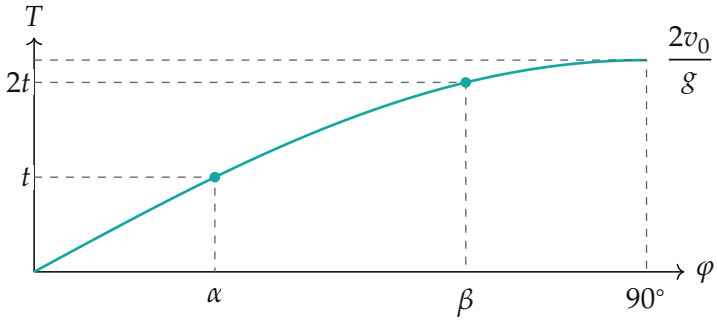
4. Отношение времён полёта. Запишем время полёта по формуле пункта 1 для каждого тела:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad 2t = \frac{2v_0 \sin\beta}{g} = \frac{2v_0 \cos\alpha}{g}.$$

Здесь использовали $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Неизвестными осталось только α: разделим второе равенство на первое, v_0 и g сократятся:

$$2 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6°.$$

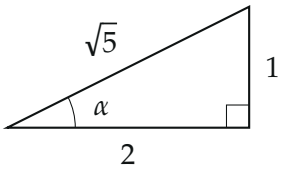
Второе тело брошено под $\beta = 90° - \alpha \approx 63{,}4°$.



Время полёта $T = \frac{2v_0}{g}\sin\varphi$: у β оно вдвое больше, чем у α

5. Что ещё получается. Из $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ следует $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда из $t = 2v_0\sin\alpha/g$ находим скорость броска, а затем дальность:

$$v_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}gt, \qquad l = v_0\cos\alpha\cdot t = \frac{\sqrt{5}}{2}gt\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot t = gt^2.$$



Треугольник с $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$*: катеты* 1 *и* 2*, гипотенуза* $\sqrt{5}$

Обратите внимание: из $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ следуют *две* возможности, и одну из них нужно отбросить по условию. Если взять $\beta = \alpha$, то времена полёта будут равны, а по условию они различаются вдвое.

Проверка. Решим тем же методом без формулы дальности. Тела упали в одну точку, поэтому вдоль x: $v_0\cos\alpha\cdot t = v_0\cos\beta\cdot 2t$, то есть $\cos\alpha = 2\cos\beta$. Вдоль y из времён полёта: $\sin\beta = 2\sin\alpha$. Подставим в $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$:

$$4\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{4} = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},$$

как и выше. Числа: $\cos 26{,}6^\circ \approx 0{,}894 = 2\cos 63{,}4^\circ$, $\sin 63{,}4^\circ \approx 0{,}894 = 2\sin 26{,}6^\circ$. Предел: при равных временах полёта получилось бы $\operatorname{tg}\alpha = 1$, то есть 45° — угол без пары, траектория одна.

Физический смысл: пологая и крутая траектории с общими началом и концом; крутая держится в воздухе дольше, и ровно во столько раз, во сколько $\operatorname{tg}\alpha$ меньше единицы.

Ответ. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 26{,}6^\circ$ (второе тело — под 63,4°; $v_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}gt$, $l = gt^2$).