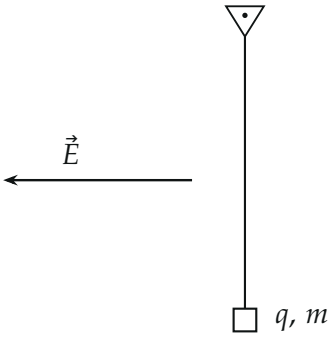
# Заряд на нити и импульс поля

**Задача 2.** [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 2] На невесомой нерастяжимой нити длиной $l$ подвешено маленькое тело массой $m$ с зарядом $q$. На очень короткое время $\tau$ включается горизонтальное электрическое поле. При какой минимальной напряжённости электрического поля $E$ тело совершит полный оборот, двигаясь в вертикальной плоскости по окружности с центром в точке крепления нити? Конструкция крепления нити не мешает телу вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки крепления нити.




▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача из двух частей. Сначала очень короткий толчок: пока поле включено, тело не успевает сместиться, и импульс силы $qE\tau$ целиком превращается в горизонтальную скорость $v$. Потом поле исчезло, и тело движется на нити по окружности в поле тяжести. Оборот состоится, если нить нигде не провиснет, а опаснее всего верхняя точка: там скорость наименьшая, а сила тяжести не помогает нити, а, наоборот, прижимает тело к центру. Ключевые законы: импульс силы для толчка, второй закон Ньютона для верхней точки (условие $T \geqslant 0$) и закон сохранения энергии для связи скорости внизу и вверху.

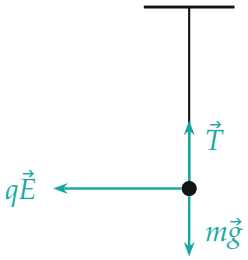
**Обозначения.** $v$ — скорость тела сразу после выключения поля (в нижней точке); $v_1$ — скорость в верхней точке; $T$ — сила натяжения нити; $\varphi$ — угол отклонения нити от вертикали вниз. Направление поля и

знак заряда не важны: тело раскрутится в ту или другую сторону, нужен только модуль импульса силы.

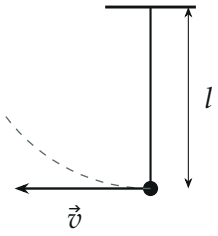
**1. Толчок.** Пока поле включено, на тело действуют горизонтальная сила $qE$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Нить вертикальна, поэтому $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ вертикальны и горизонтальный импульс не меняют (они уравновешивают друг друга: $T = mg$). Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме в проекции на горизонтальную ось; тело покоилось, поле действует время $\tau$:

$$mv - 0 = qE\tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qE\tau}{m}.$$

Обратите внимание: так считать можно потому, что $\tau$ очень мало — за это время тело сдвигается на ничтожную долю $l$, нить остаётся вертикальной и не успевает изменить направление силы.




пока поле включено




сразу после выключения

*Слева — силы во время толчка: горизонтальная сила поля даёт скорость, $T$ и $mg$ уравновешены. Справа — тело получило скорость $\vec{v}$ и пошло по окружности*

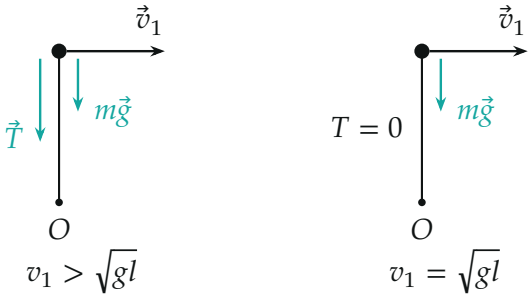
**2. Условие в верхней точке.** Тело движется по окружности радиуса $l$, значит, в каждый момент его ускорение направлено к центру и равно $v^2/l$. В верхней точке к центру (вниз) направлены обе силы: $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вниз к центру:

$$\frac{mv_1^2}{l} = T + mg.$$

Нить только тянет, поэтому $T \geqslant 0$, и нужно

$$\frac{mv_1^2}{l} \geqslant mg \quad \Rightarrow \quad v_1 \geqslant \sqrt{gl}.$$

При $v_1 = \sqrt{gl}$ нить в верхней точке ещё прямая, но уже ничего не тянет ($T = 0$): сила тяжести одна обеспечивает центростремительное ускорение, $a = g$. При меньшей скорости тело оторвётся от окружности и полетит по параболе.

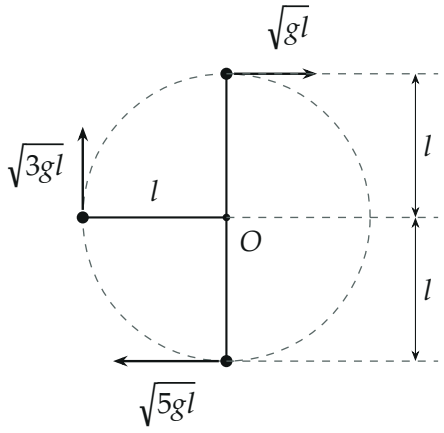



*Верхняя точка: слева нить натянута, справа — предельный случай, $T = 0$*

**3. Связь скоростей.** Рассмотрим движение от нижней точки (сразу после толчка) до верхней. Поле выключено, сила натяжения перпендикулярна скорости и работы не совершает, работу совершает только сила тяжести. Запишем закон сохранения механической энергии, нулевой уровень — нижняя точка, верхняя находится выше на $2l$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mg \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_1^2 + 4gl \geqslant gl + 4gl = 5gl.$$

Минимальная скорость внизу $v_{\min} = \sqrt{5gl}$.




*Скорость на окружности при минимальном толчке: чем выше точка, тем меньше скорость ($v^2 = 5gl - 2gh$, $h$ — высота над нижней точкой)*

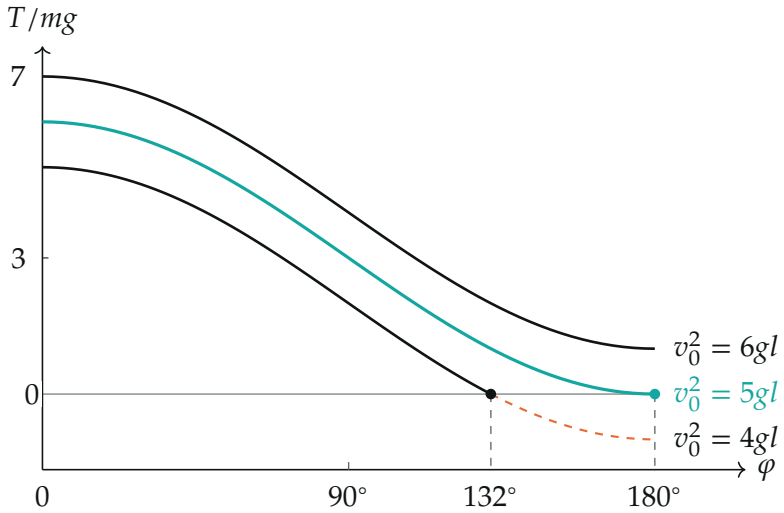
**4. Соберём ответ.** Скорость, которую даёт поле, должна быть не меньше $\sqrt{5gl}$:

$$\frac{|q|E\tau}{m} \geqslant \sqrt{5gl} \quad \Rightarrow \quad E_{\min} = \frac{m\sqrt{5gl}}{|q|\tau}.$$

**5. Проверка: нить натянута во всех точках.** Верхняя точка — самая опасная, но убедимся в этом вторым способом. Пусть нить отклонена на угол $\varphi$ от нижнего положения. Из закона сохранения энергии $v^2(\varphi) = v_0^2 - 2gl(1 - \cos\varphi)$, где $v_0$ — скорость внизу. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось к центру: $T - mg\cos\varphi = mv^2/l$, откуда

$$T(\varphi) = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\varphi\right).$$

При $v_0^2 = 5gl$ получаем $T = 3mg(1 + \cos\varphi) \geqslant 0$, и нуль достигается только при $\varphi = 180°$, в верхней точке. При $v_0^2 = 4gl$ получилось бы $T = mg(2 + 3\cos\varphi)$: $T$ обращается в нуль уже при $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$ ($\varphi \approx 132°$), нить провисает, тело сходит с окружности и до верха не доходит.




*Натяжение нити $T(\varphi)$ при разных скоростях внизу $v_0$: при $5gl$ кривая касается нуля в верхней точке, при $4gl$ нить провисает ещё до неё (пунктир — движение по окружности невозможно)*

**Проверка.** Размерность: $qE\tau$ — сила на время, то есть импульс, и $m\sqrt{gl}$ — тоже импульс. Предел: $g \to 0$ — тяжести нет, $E_{\min} \to 0$, достаточно любого толчка; $l \to 0$ — то же. Второй способ для главного шага (нить в верхней точке) — пункт 5: натяжение нигде не отрицательно именно при $v_0^2 \geqslant 5gl$.

Физический смысл: чтобы пройти верх, телу внизу нужна кинетическая энергия $\frac{5}{2}mgl$ — $2mgl$ на подъём и ещё $\frac{1}{2}mgl$ на скорость $\sqrt{gl}$ вверху, при которой нить ещё не провисает; поле сообщает эту энергию одним коротким ударом.

**Ответ.** $E_{\min} = \dfrac{m\sqrt{5gl}}{|q|\,\tau}$.