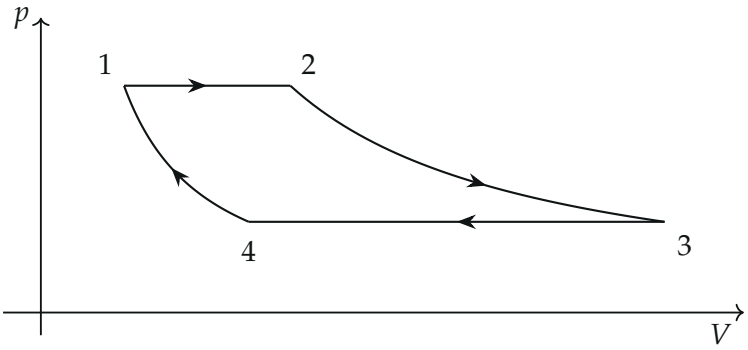
Цикл из изобар и изотерм

Задача 3. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 3] С идеальным одноатомным газом происходит циклический процесс 1-2-3-4-1, состоящий из двух изобар (1-2 и 3-4) и двух изотерм (2-3 и 4-1). Температура газа на изотерме 2-3 втрое больше температуры на изотерме 4-1. Известно, что количество теплоты, полученное газом на участке 2-3, вдвое больше количества теплоты, полученного газом на участке 1-2. Найти термодинамический КПД цикла.



▲ **Решение. Что происходит.** Газ в цикле работает как тепловая машина, и КПД — это работа за цикл, делённая на теплоту, полученную газом (от нагревателя) за цикл: $\eta = A/Q_{\text{н}}$. Участки цикла — изобары и изотермы, а теплоту на каждом из них легко выразить: на изобаре она определяется только изменением температуры, на изотерме — работой. Главная идея: все четыре теплоты выражаются через одну величину $Q = Q_{23}$, и КПД получается числом. Класс задачи: цикл из участков с известными теплотами; сначала теплоты по участкам, потом работа и КПД.

Обозначения. T — температура на изотерме 4-1, тогда на изотерме 2-3 она равна $3T$; ν — число молей газа; Q_{ij} — теплота, полученная газом на участке i-j (знак «минус» значит, что газ теплоту отдаёт); $Q = Q_{23}$; по условию $Q_{12} = \dfrac{Q}{2}$.

1. Изобары: теплота на 3-4. На изобаре газ получает теплоту $Q = \nu c_p \Delta T$, и она зависит только от изменения температуры, давление в формулу не входит. Температуры точек: $T_1 = T_4 = T$ (изотерма 4-1), $T_2 =$

$T_3 = 3T$ (изотерма 2-3). Значит, на участке 1-2 температура растёт на $2T$, а на участке 3-4 падает на те же $2T$:

$$\frac{Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} = \frac{-2T}{2T} = -1 \quad \Rightarrow \quad Q_{34} = -\frac{Q}{2}.$$

На участке 3-4 газ охлаждается и теплоту отдаёт.

2. Изотермы: теплота на 4-1. На изотерме температура не меняется, внутренняя энергия идеального газа тоже, поэтому первое начало термодинамики даёт $Q = A$, а работа газа при постоянной температуре $T_{\text{из}}$ вычисляется по формуле

$$A = \nu R T_{\text{из}} \ln \frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{нач}}}.$$

На изобарах объём пропорционален температуре (закон Гей-Люссака), поэтому

$$V_2 = 3V_1, \qquad V_3 = 3V_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{3V_4}{3V_1} = \frac{V_4}{V_1} \equiv r.$$

Объёмы на двух изотермах меняются в одно и то же число раз r: на изотерме 2-3 газ расширяется в r раз, на 4-1 в r раз сжимается. Запишем теплоты:

$$Q_{23} = \nu R \cdot 3T \ln r = Q, \qquad Q_{41} = \nu R T \ln \frac{V_1}{V_4} = -\nu R T \ln r.$$

Разделим второе равенство на первое, $\nu R T \ln r$ сократится:

$$\frac{Q_{41}}{Q_{23}} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad Q_{41} = -\frac{Q}{3}.$$

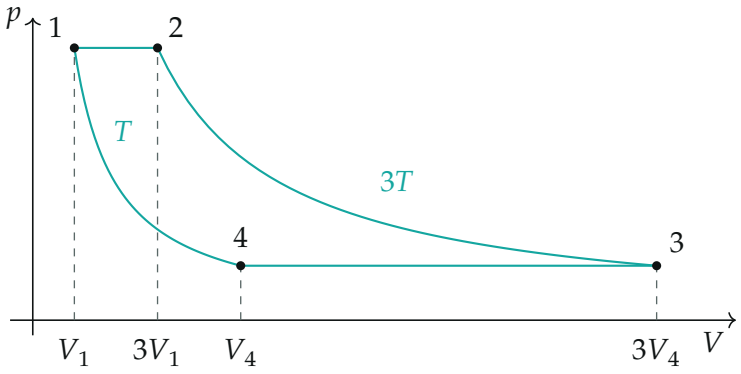
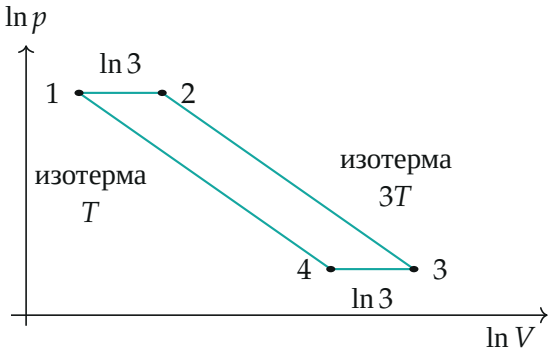


Схема цикла (не в масштабе): объёмы на изобарах отличаются в 3 раза, а на изотермах $V_3/V_2 = V_4/V_1 = r$



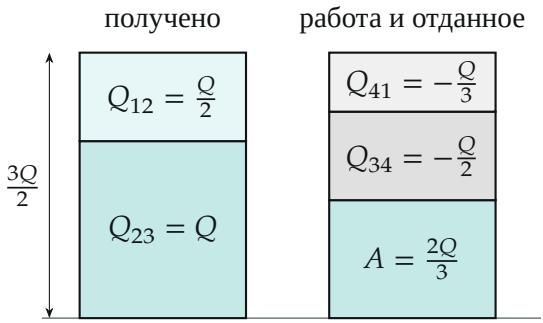
Тот же цикл в логарифмическом масштабе: изотермы — параллельные прямые, при любом давлении объёмы на них различаются в 3 раза, поэтому $V_3/V_2 = V_4/V_1$

3. Работа за цикл и теплота от нагревателя. Внутренняя энергия идеального газа после целого цикла возвращается к прежнему значению, поэтому по первому началу термодинамики работа за цикл равна суммарной теплоте. Сложим теплоты всех четырёх участков:

$$A = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = \frac{Q}{2} + Q - \frac{Q}{2} - \frac{Q}{3} = \frac{2Q}{3}.$$

Газ получает теплоту только на участках 1-2 и 2-3 (там $Q > 0$), на двух других отдаёт:

$$Q_н = Q_{12} + Q_{23} = \frac{Q}{2} + Q = \frac{3Q}{2}.$$



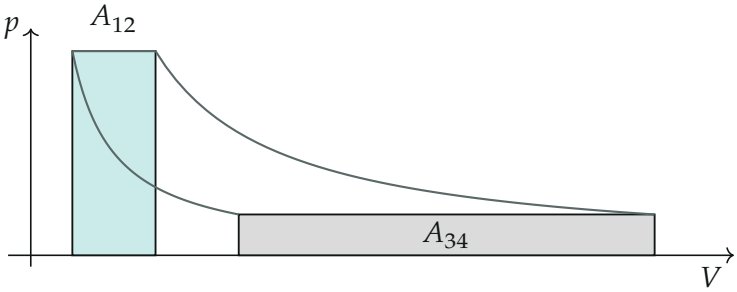
Баланс теплоты: полученное газом $\frac{3}{2}Q$ делится на работу $\frac{2}{3}Q$ и отданное холодильнику $\frac{5}{6}Q$

4. КПД. Разделим работу на теплоту, полученную от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{2Q/3}{3Q/2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44 = 44\%.$$

Обратите внимание: в знаменатель идёт вся теплота, которую газ *получил*, то есть и Q_{12} (газ нагревается от T до $3T$), и Q_{23}; отданные Q_{34} и Q_{41} туда не входят. Если взять только Q_{23}, получится неверное $\eta = A/Q_{23} = 2/3$.

Проверка. Второй способ для работы: посчитаем её по участкам прямо. На изобарах $A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = 2\nu RT$ и $A_{34} = \nu R(T_4 - T_3) = -2\nu RT$ — они уничтожают друг друга (площади прямоугольников на рисунке равны), остаётся $A = A_{23} + A_{41} = Q - Q/3 = 2Q/3$, как и выше.



Площади прямоугольников под изобарами равны: $|A_{12}| = |A_{34}| = 2\nu RT$

Предел: КПД не может быть больше, чем у идеальной машины Карно между температурами $3T$ и T, то есть $1 - 1/3 = 2/3 \approx 67\%$; получили 44% — меньше, как и должно быть. Данные условия согласованы: $Q_{12} = \frac{5}{2}\nu R \cdot 2T = 5\nu RT$, $Q_{23} = 3\nu RT \ln r$, и из $Q_{23} = 2Q_{12}$ следует $\ln r = 10/3$, $r \approx 28 > 1$ — такой цикл существует.

Физический смысл: КПД меньше карновского, потому что часть теплоты газ получает при температуре ниже $3T$ (на изобаре 1-2), а часть отдаёт при температуре выше T (на изобаре 3-4), и обмен между этими двумя участками никак не используется.

Ответ. $\eta = \dfrac{4}{9} \approx 44\%$.