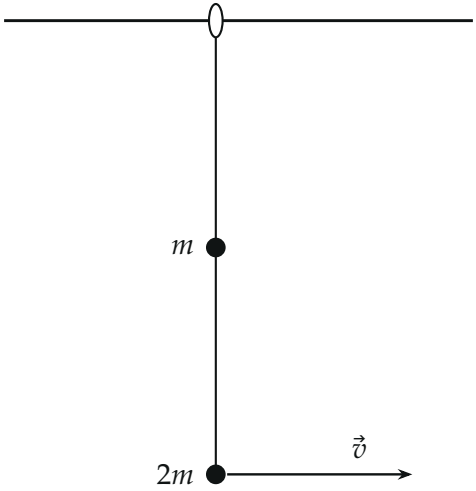
Колечко на стержне и два тела

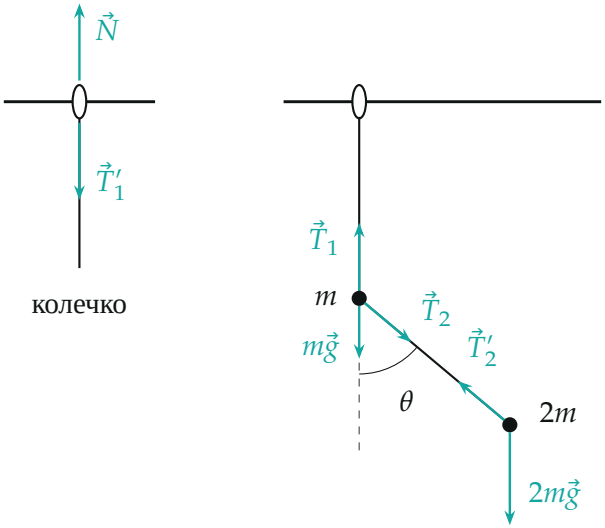
Задача 4. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Очень лёгкое колечко может без трения скользить по горизонтальному стержню. К колечку с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей длиной l прикреплены два тела массами m и $2m$ (см. рисунок). Какую минимальную горизонтальную скорость v нужно сообщить нижнему телу, чтобы в процессе последующего движения тела могли оказаться на одной и той же высоте?



▲ **Решение. Что происходит.** Система тел на нитях со связями, где работают законы сохранения: горизонтальный импульс и энергия. Главная хитрость — колечко «очень лёгкое»: его массу считаем нулевой, а на тело нулевой массы сила не может действовать (иначе ускорение было бы бесконечным). Из этого следует, что верхняя нить всё время вертикальна, среднее тело (масса m) висит под колечком на постоянной глубине l и движется только по горизонтали, а нижнее тело (масса $2m$) качается на нити вокруг среднего, которое само разгоняется. Тела окажутся на одной высоте, когда нижнее поднимется на l, то есть нижняя нить станет горизонтальной.

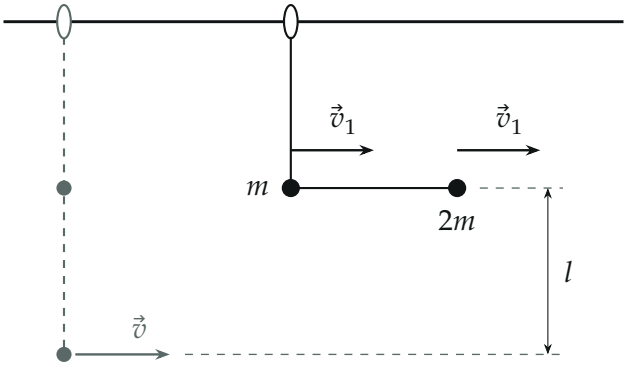
Обозначения. θ — угол нижней нити с вертикалью (в начале $\theta = 0$); v_1 — общая горизонтальная скорость тел в момент, когда они на одной высоте; $\vec{T}_1$ — сила верхней нити, $\vec{T}_2$ — нижней; $\vec{N}$ — реакция стержня. Ось x — горизонтально вдоль стержня в сторону начальной скорости, ось y — вертикально вверх.

1. Верхняя нить вертикальна. Рассмотрим колечко. На него действуют сила стержня $\vec{N}$ (стержень гладкий, поэтому она вертикальна) и сила верхней нити, направленная вдоль нити. Масса колечка равна нулю, поэтому по второму закону Ньютона сумма сил на него в проекции на ось x равна нулю. Единственная возможная горизонтальная сила — горизонтальная составляющая силы нити, значит, она равна нулю, а нить вертикальна. Следствия: среднее тело всё время находится на расстоянии l под стержнем, его скорость горизонтальна и равна скорости колечка.



Слева — силы на колечко (его масса равна нулю, поэтому $\vec{N} + \vec{T}'_1 = 0$). Справа — силы на тела в произвольный момент: $T_1 = mg + T_2 \cos\theta$ уравновешивает среднее тело по вертикали, $T_2 \sin\theta$ его разгоняет

2. Когда тела на одной высоте. Среднее тело всегда на глубине l под стержнем. Нижнее тело находится на глубине $l + l\cos\theta$. Высоты совпадают при $\cos\theta = 0$, то есть $\theta = 90°$: нижняя нить горизонтальна, а нижнее тело поднялось с начальной глубины $2l$ на l.



Слева (серым) — начало: нижнее тело получило скорость $\vec{v}$. Справа — момент, когда тела на одной высоте: нить горизонтальна, скорости тел одинаковы, нижнее тело поднялось на l

3. Условие минимальности. Чем меньше v, тем ниже поднимется нижнее тело. Предельный случай: оно доходит до положения $\theta = 90°$ и там на мгновение останавливается относительно среднего тела. Если бы в этот момент у нижнего тела была вертикальная скорость, оно ещё поднималось бы выше, и начальную скорость можно было бы немного уменьшить. Горизонтальной относительной скорости у тел при $\theta = 90°$ нет (нить горизонтальна и нерастяжима), поэтому в предельном случае *все* тела движутся с одной скоростью v_1 вдоль стержня, как показано на рисунке.

4. Импульс. Система из колечка и двух тел: внешние силы — тяжесть и реакция стержня, обе вертикальны; нити — внутренние. Значит, горизонтальная проекция импульса системы сохраняется. Начальный импульс — у нижнего тела, конечный — у обоих тел (колечко импульса не имеет):

$$2m\,v = (m + 2m)\,v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2}{3}\,v.$$

Обратите внимание: среднее тело *не* стоит на месте — нижняя нить разгоняет его, поэтому в импульс входят оба тела.

5. Энергия. Нити нерастяжимы, их внутренние силы суммарной работы не совершают; стержень гладкий и перпендикулярен перемещению колечка, его сила работы не совершает. Значит, сохраняется механическая энергия: начальная кинетическая энергия нижнего тела пере-

ходит в кинетическую энергию обоих тел и потенциальную энергию подъёма нижнего тела на l (среднее тело высоту не меняет):

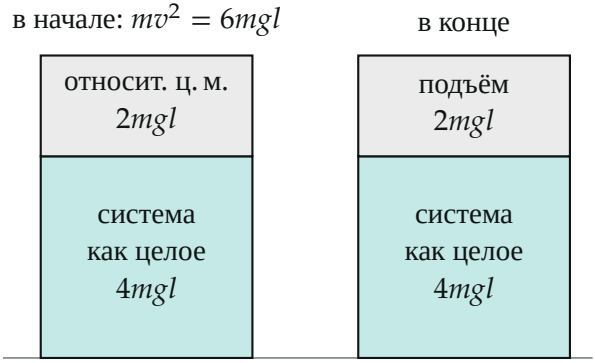
$$\frac{2m\,v^2}{2} = \frac{m\,v_1^2}{2} + \frac{2m\,v_1^2}{2} + 2m\,g\,l.$$

Подставим $v_1 = \frac{2}{3}v$:

$$mv^2 = \frac{3m}{2}\cdot\frac{4v^2}{9} + 2mgl = \frac{2}{3}\,mv^2 + 2mgl,$$

откуда

$$\frac{1}{3}\,v^2 = 2gl \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{6gl}.$$



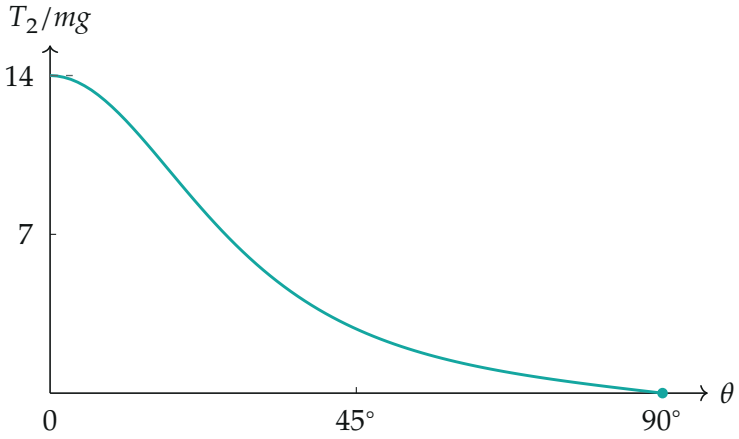
Баланс энергии: две трети остаются в движении системы вдоль стержня и на подъём не идут

6. Проверка. *Второй способ* — через центр масс. Горизонтальная скорость центра масс $V = \frac{2mv}{3m} = \frac{2}{3}v$ не меняется. Кинетическую энергию системы можно записать как энергию движения «всей массы $3m$ со скоростью V» плюс энергию K' движения относительно центра масс: $K = \frac{3m}{2}V^2 + K'$. В начале $K' = mv^2 - \frac{2}{3}mv^2 = \frac{1}{3}mv^2$. Тела окажутся на одной высоте, если K' покроет подъём: $K' \geqslant 2mgl$, то есть $v^2 \geqslant 6gl$; в предельном случае $K' = 0$ в конце — все тела движутся вместе, как в пункте 3.

Нить натянута. Нижняя нить не должна провиснуть по пути. При $v^2 = 6gl$ из законов сохранения импульса и энергии получается $l\dot\theta^2\left(1-\frac{2}{3}\cos^2\theta\right) = 2g\cos\theta$, а уравнение для нижнего тела в системе отсчёта среднего даёт $T_2\left(1+2\sin^2\theta\right) = 2m\left(l\dot\theta^2 + g\cos\theta\right)$. Отсюда

$$T_2 = 2mg\cos\theta\cdot\frac{9-2\cos^2\theta}{\left(3-2\cos^2\theta\right)^2} \geqslant 0 \qquad (0\leqslant\theta\leqslant 90^\circ),$$

причём $T_2 = 14\,mg$ в начале ($\theta = 0$) и $T_2 \to 0$ при $\theta \to 90^\circ$ — как у шарика на нити в верхней точке круга. Верхняя нить натянута всегда: $T_1 = mg + T_2\cos\theta > 0$.



Сила натяжения нижней нити при $v = \sqrt{6gl}$: нигде не отрицательна, в момент равной высоты обращается в нуль

Предел: если бы среднее тело было закреплено (колечко не двигалось), нижнему телу хватило бы $v = \sqrt{2gl}$; подвижное среднее тело отбирает часть энергии на собственное движение, и нужно больше — $\sqrt{6gl}$, как и получилось. Размерность: $\sqrt{gl}$ — скорость.

Физический смысл: две трети начальной кинетической энергии нельзя пустить на подъём — она остаётся в движении всей системы вдоль стержня, на подъём годится только оставшаяся треть $\frac{1}{3}mv^2 = 2mgl$.

Ответ. $v_{\min} = \sqrt{6gl}$.