Две частицы в магнитном поле

Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ ($q > 0$) удерживают на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле, которое перпендикулярно отрезку, соединяющему частицы. Частицы отпускают. При какой минимальной индукции магнитного поля B частицы не столкнутся? На какое минимальное расстояние в этом случае сблизятся частицы?





▲ **Решение.** **Что происходит.** Кулоновская сила притягивает частицы друг к другу, но как только они набирают скорость, магнитное поле её поворачивает. Для двух зарядов, движущихся навстречу друг другу, силы Лоренца направлены в одну сторону, поэтому частицы не только сближаются, но и уходят «вверх» вместе. Если поле сильное, скорости успевают стать параллельными, и тогда магнитная сила уже не сближает частицы, а растаскивает. Граница «столкнутся — не столкнутся» — это поворотная точка движения. Используем два закона: связь скорости со смещением (из второго закона Ньютона, просуммированного по малым промежуткам времени) и закон сохранения энергии (магнитная сила работы не совершает).

Обозначения. Ось x направлена вдоль начального отрезка от частицы $+q$ к частице $-q$, ось y — вверх, перпендикулярно x (поле $\vec{B}$ направлено от нас, как на рисунке). ξ — смещение частицы $+q$ вдоль x от начального положения; s — расстояние между частицами; v — скорость частицы; k — коэффициент в законе Кулона, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

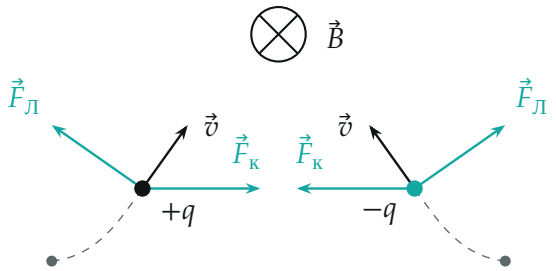


Схема сил в произвольный момент (не в масштабе): кулоновские силы $\vec{F}_к$ направлены друг к другу, силы Лоренца $\vec{F}_Л$ — перпендикулярно скоростям, и обе уводят частицы вверх

1. Движение симметрично. Выпишем второй закон Ньютона по осям для обеих частиц. Сила Лоренца на заряд Q со скоростью (v_x, v_y) при такой $\vec{B}$ равна $QB\,(-v_y,\ v_x)$. Для $+q$ и для $-q$ (кулоновская сила $F_к$ — вдоль отрезка между частицами):

$$m\ddot{x}_1 = F_к\cos\gamma - qB\dot{y}_1, \qquad m\ddot{y}_1 = F_к\sin\gamma + qB\dot{x}_1,$$
$$m\ddot{x}_2 = -F_к\cos\gamma + qB\dot{y}_2, \quad m\ddot{y}_2 = -F_к\sin\gamma - qB\dot{x}_2.$$

Здесь γ — угол отрезка между частицами с осью x. Движение, в котором частицы всё время на одной высоте и зеркальны относительно середины отрезка ($y_2 = y_1$, $x_2 = -x_1$, $\gamma = 0$), удовлетворяет всем четырём уравнениям и начальным условиям, а решение единственно. Значит, отрезок между частицами остаётся горизонтальным, кулоновская сила — вдоль x, и достаточно рассмотреть одну частицу.

2. Связь скорости и смещения. Для частицы $+q$ вдоль y (кулоновской силы там нет): $m\dot{v}_y = qBv_x$, где $v_x = \dot{\xi}$. Рассмотрим малый промежуток dt, умножим уравнение на dt и сложим по всем промежуткам от начала движения до момента t: слева получается изменение v_y (начальная скорость нуль), справа — изменение координаты ξ:

$$m\,v_y = qB\,\xi.$$

Эта связь верна в любой момент времени, а не только в конце. Для $-q$ она та же в зеркальной записи.

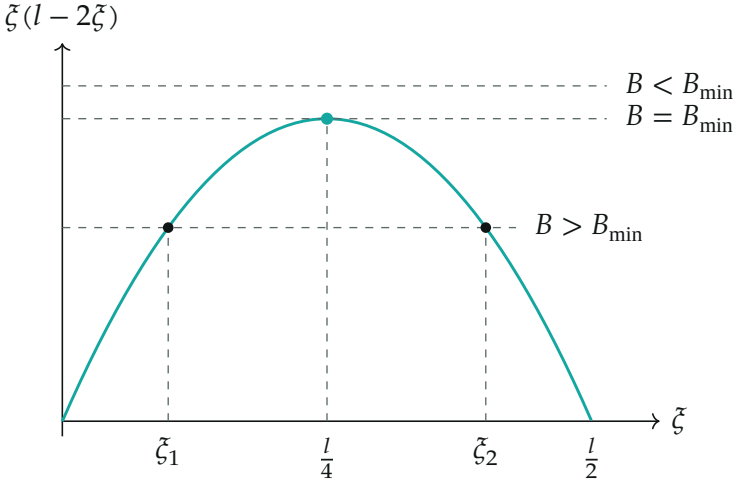
3. Энергия. Сила Лоренца работы не совершает, поэтому изменение кинетической энергии двух частиц равно уменьшению потенциальной энергии их кулоновского взаимодействия $-kq^2/s$. Расстояние $s = l - 2\xi$. Частицы одинаковы, у каждой скорость v (с проекциями v_x, v_y):

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = \frac{kq^2}{l-2\xi} - \frac{kq^2}{l} = \frac{2kq^2\,\xi}{l\,(l-2\xi)}.$$

4. Точка наибольшего сближения. Расстояние s перестаёт уменьшаться, когда $\dot{\xi} = v_x = 0$ (поворотная точка по x): тогда $v = v_y$. Подставим $v_y = qB\xi/m$ из пункта 2 в пункт 3 и сократим $q^2\xi$:

$$\frac{q^2B^2\xi^2}{m} = \frac{2kq^2\xi}{l\,(l-2\xi)} \quad \Rightarrow \quad \xi\,(l-2\xi) = \frac{2km}{lB^2}.$$

Если у этого уравнения есть корень $0 < \xi < l/2$, частица дойдёт до него, повернёт, и столкновения не будет; если корня нет, скорость v_x нигде не обратится в нуль, ξ дорастёт до $l/2$, то есть $s = 0$ — столкновение.



Левая часть уравнения — парабола $\xi(l-2\xi)$ с наибольшим значением $l^2/8$ при $\xi = l/4$; правая часть $2km/(lB^2)$ — горизонтальная прямая, тем ниже, чем больше B

5. Минимальная индукция. Левая часть $\xi(l-2\xi) = \dfrac{l^2}{8} - 2\left(\xi - \dfrac{l}{4}\right)^2$ наибольшая при $\xi = l/4$ и равна $l^2/8$. Корень есть, если правая часть не превосходит этого максимума:

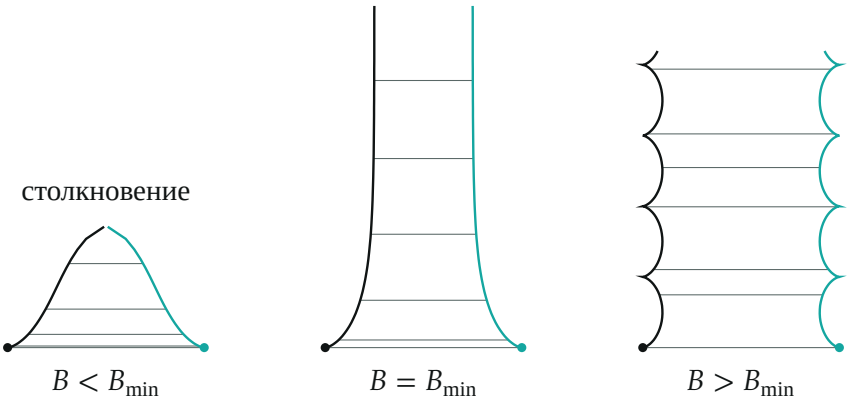
$$\frac{2km}{lB^2} \leqslant \frac{l^2}{8} \quad \Rightarrow \quad B^2 \geqslant \frac{16\,km}{l^3} \quad \Rightarrow \quad B_{\min} = 4\sqrt{\frac{km}{l^3}}.$$

В единицах СИ при $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ это $B_{\min} = 2\sqrt{\dfrac{m}{\pi\varepsilon_0 l^3}}$.

6. Наименьшее расстояние. При $B = B_{\min}$ корень двойной: $\xi = l/4$, и расстояние

$$s = l - 2\xi = \frac{l}{2}.$$

Для $B > B_{\min}$ первый корень $\xi_1 < l/4$, и частицы приближаются лишь до $l - 2\xi_1 > l/2$. Обратите внимание: при $B = B_{\min}$ частицы подходят к расстоянию $l/2$ бесконечно долго и дальше уже не сближаются — они остаются на этом расстоянии и вместе дрейфуют вверх.



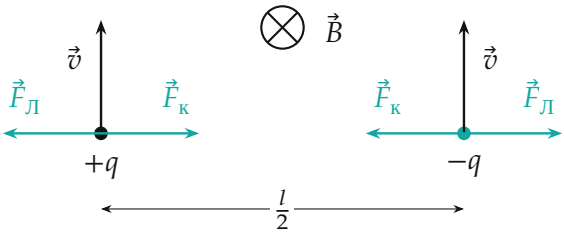
Траектории частиц (численный расчёт): чёрная — $+q$, бирюзовая — $-q$; серые отрезки соединяют частицы в равные моменты времени

Проверка. *Второй способ* для $B_{\min}$ — равновесие сил. При $B = B_{\min}$ частицы движутся параллельно друг другу на расстоянии $l/2$ с одинаковой постоянной скоростью $v = qB\xi/m = qBl/(4m)$ (пункт 2 при

$\xi = l/4$). Сила Лоренца на частицу, движущуюся вдоль y, направлена вдоль x от второй частицы и должна уравновесить притяжение:

$$qvB = \frac{kq^2}{(l/2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2B^2l}{4m} = \frac{4kq^2}{l^2} \quad \Rightarrow \quad B^2 = \frac{16\,km}{l^3},$$

то же значение. Численное решение уравнений движения подтверждает вывод: при $B = 0{,}99B_{\min}$ частицы сталкиваются (расстояние обращается в нуль), при $B = 1{,}01B_{\min}$ расстояние не опускается ниже $0{,}57\,l$.



Предельный режим $B = B_{\min}$: частицы движутся вверх параллельно с одной скоростью, кулоновское притяжение уравновешено силой Лоренца

Размерность: $\sqrt{km/l^3}$ — это кг/(Кл · с), то есть тесла. Физический смысл: частицы не сталкиваются, если поле успевает превратить их разгон навстречу друг другу в общий дрейф вверх; в предельном случае они зависают на половине начального расстояния.

Ответ. $B_{\min} = 4\sqrt{\dfrac{km}{l^3}}$ (где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$); минимальное расстояние между частицами $l/2$.