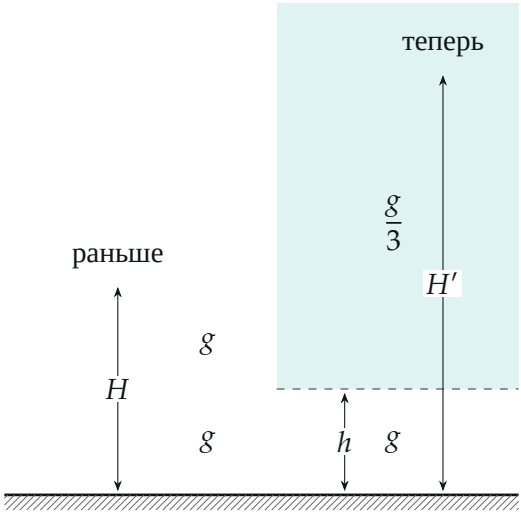
Ускорение свободного падения меняется

Задача 1. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Экспериментируя с лунным камнем, Знайка сумел следующим образом изменить ускорение свободного падения в Цветочном городе: до высоты $h = 10$ м ускорение свободного падения осталось равным g, выше стало $g/3$. На какую высоту сможет забросить теперь тело Незнайка, если раньше он мог его подбросить на высоту $H = 20$ м.

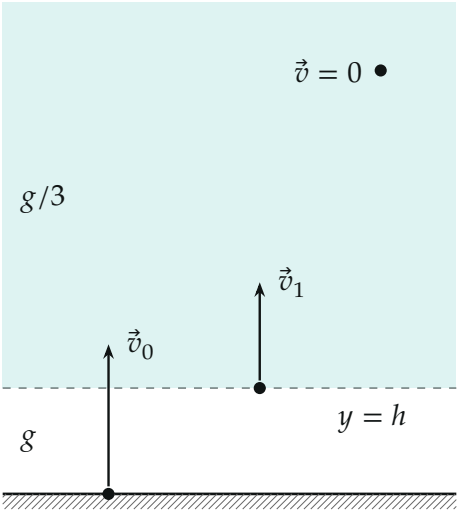


Поясняющий рисунок: поле тяжести раньше и теперь (в масштабе ответа); H' — искомая высота

▲ **Решение. Что происходит.** Незнайка бросает камень вверх с той же скоростью, что и раньше, но тормозит камень теперь по-разному: до высоты h ускорением g, выше — втрое меньшим. Главная идея — разбить подъём на два участка, на каждом из которых ускорение постоянно, и на каждом применить закон сохранения энергии. Начальную скорость берём из «старого» броска: он говорит, что при ускорении g камень поднимался ровно на H.

Качественно: выше h скорость падает втрое медленнее, поэтому тело поднимется выше, чем поднялось бы при g.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх от места броска (от земли). v_0 — начальная скорость, v_1 — скорость на высоте h, h_1 — дополнительная высота подъёма выше h, $H' = h + h_1$ — искомая высота.



Три момента движения: бросок, высота h, верхняя точка (длины стрелок — по модулям скоростей)

1. Начальная скорость. Применим закон сохранения энергии к старому броску: от земли до верхней точки на высоте H, где $v = 0$, ускорение везде g:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = 2gH.$$

Энергия удобнее формул движения: время нас не интересует, а работа силы тяжести на любом участке — это $-mg$ на пройденную высоту.

2. Скорость на высоте h. До h ускорение по-прежнему g, поэтому закон сохранения энергии для участка от земли до высоты h даёт

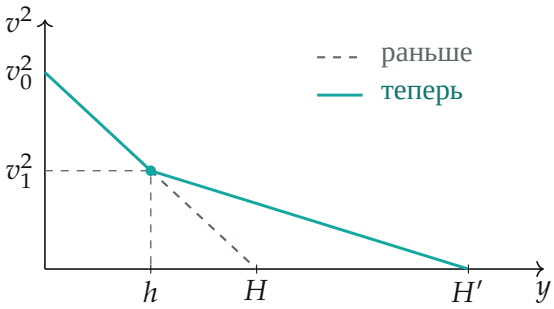
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2g(H - h).$$

Так как $H > h$, имеем $v_1^2 > 0$: камень долетает до границы.

3. Подъём выше h. Теперь тормозящая сила — $mg/3$. Запишем закон сохранения энергии для участка от высоты h до верхней точки: вся

кинетическая энергия $mv_1^2/2$ идёт на работу против силы $mg/3$ на пути h_1:

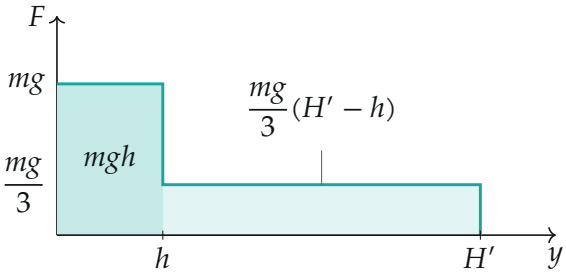
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mg}{3}h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{3v_1^2}{2g} = 3(H-h).$$



Квадрат скорости как функция высоты: на каждом участке — прямая, наклон которой равен $-2 \times$ ускорение

4. Сборка. Высота подъёма над землёй складывается из двух участков:

$$H' = h + h_1 = h + 3(H-h) = 3H - 2h = 3\cdot 20 - 2\cdot 10 = 40 \text{ м}.$$



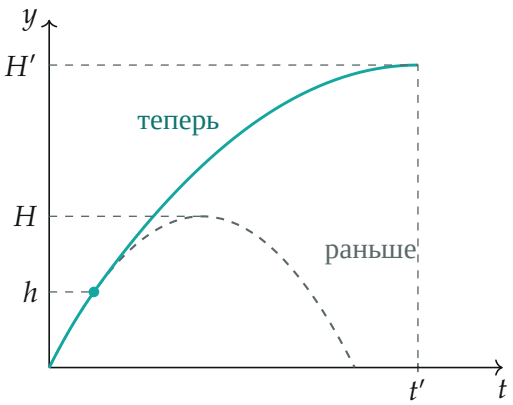
Второй способ: работа силы тяжести — площадь под графиком модуля силы; вся площадь равна начальной кинетической энергии $mv_0^2/2 = mgH$

Второй способ. Вся начальная кинетическая энергия mgH тратится на работу против силы тяжести: mg на пути h и $mg/3$ на пути $H'-h$, то

есть

$$mgH = mgh + \frac{mg}{3}(H' - h) \quad \Rightarrow \quad H' = h + 3(H - h),$$

тот же результат. Это площадь под графиком модуля силы тяжести.



Высота камня как функция времени: излом при переходе через h; подъём до H' длится в 2,4 раза дольше (при $g = 9{,}8$ м/с^2 — около 4,9 с вместо 2,0 с)

Обратите внимание: нельзя записать $v_0^2 = 2 \cdot \frac{g}{3} H'$ — такая формула верна только при постоянном ускорении на всём пути, а здесь оно меняется на высоте h. Поэтому и нужны два участка со своей скоростью v_1 на границе.

Проверка. Размерность: $3H - 2h$ — метры. Пределы: при $h \to 0$ ускорение $g/3$ действует везде, и $H' = 3H$, втрое выше, как и должно быть при втрое слабом поле; при $h = H$ камень доходит до границы с нулевой скоростью, и $H' = H$. Физический смысл: убыль квадрата скорости на единицу высоты выше h втрое меньше ($2g/3$ вместо $2g$), поэтому участок выше h втрое длиннее, чем был бы при g.

Ответ. $H' = 3H - 2h = 40$ м.