Вода просачивается через поршень

Задача 2. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 2] В запаянном вертикальном цилиндрическом сосуде находится тонкий невесомый поршень, на который налит слой воды толщиной h (левый рисунок). В равновесии крышка сосуда находится на высоте h_1 от поверхности воды, поршень — на высоте h_2 от дна сосуда, а давление воздуха над слоем воды равно p_1. Из-за неплотных контактов поршня со стенками сосуда вода просачивается вниз, а воздух наверх. Каким будет давление воздуха в сосуде, когда вся вода просочится (правый рисунок). Температура постоянна. Плотность воды — ρ.

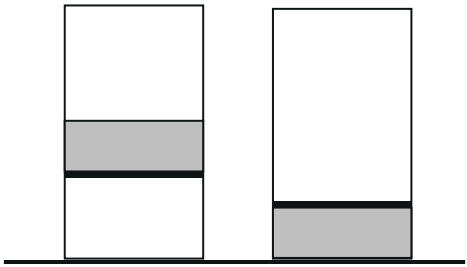
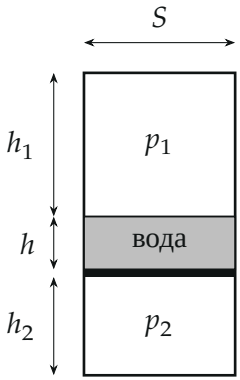


Рисунок условия: сосуд до и после просачивания воды

▲ **Решение. Что происходит.** Вода медленно уходит вниз через неплотности, а воздух поднимается вверх, и в конце весь воздух оказывается над поршнем, лежащим на воде. Температура постоянна, воздух не покидает сосуд, поэтому нам не нужен ход процесса: достаточно записать уравнение Клапейрона — Менделеева для начального и конечного состояний. Всё сводится к тому, чтобы найти давление воздуха под поршнем в начале и объёмы, а затем сложить количества вещества двух порций воздуха.

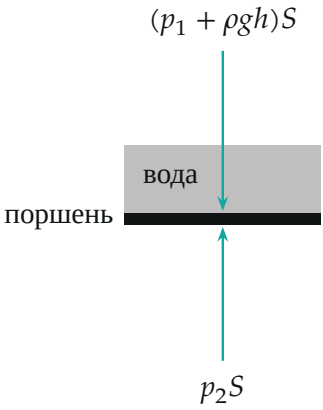
Обозначения. S — площадь сечения сосуда. Воздух над водой: давление p_1, объём $V_1 = Sh_1$, количество вещества ν_1. Воздух под поршнем: давление p_2 (неизвестное), объём $V_2 = Sh_2$, количество вещества ν_2. Температура T постоянна. p — искомое давление воздуха в конце.



Начальное состояние: слой воды толщиной h лежит на поршне

1. Равновесие поршня в начале. Поршень невесомый, поэтому сумма сил давления на него равна нулю. Сверху действует давление на дне слоя воды, $p_1 + \rho g h$ (давление воздуха плюс гидростатическое давление столба воды высотой h), снизу — давление воздуха p_2. Запишем второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикальную ось (ускорение равно нулю):

$$p_2 S - (p_1 + \rho g h) S = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \rho g h.$$



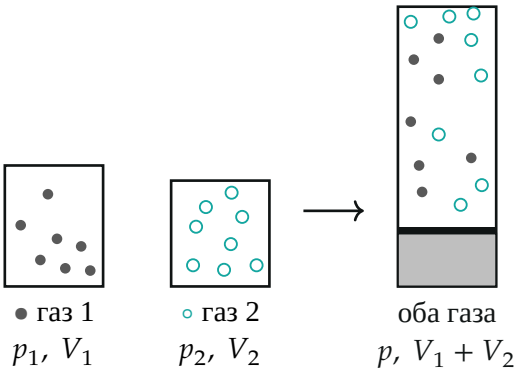
Силы давления на невесомый поршень: сверху — давление под слоем воды, снизу — давление воздуха

2. Воздух в начале. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для каждой порции воздуха:

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT, \qquad p_2 V_2 = \nu_2 RT.$$

3. Воздух в конце. Вода ушла вниз, воздух из обеих порций оказался над поршнем, лежащим на воде. Объём воздуха стал $V_1 + V_2 = S(h_1 + h_2)$: сосуд не изменился, а объём Sh, занятый водой, только переместился (вода несжимаема). Количество воздуха сохранилось, $\nu_1 + \nu_2$. Закон Клапейрона — Менделеева для всего воздуха:

$$p\,(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT.$$



Каждая порция воздуха расширяется до всего объёма $V_1 + V_2$ и смешивается с другой; внизу остаётся только вода под поршнем

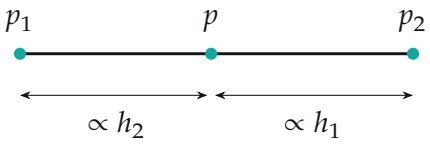
4. Решение. Выразим ν_1 и ν_2 из пункта 2 и подставим в пункт 3; температура и R сокращаются:

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2}{h_1 + h_2}.$$

Подставим p_2 из пункта 1:

$$p = \frac{p_1 h_1 + (p_1 + \rho g h) h_2}{h_1 + h_2} = p_1 + \rho g h \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Второй способ. Каждая порция воздуха расширяется изотермически до объёма $V_1 + V_2$, а по закону Бойля — Мариотта давление при этом падает: порция 1 даёт $p_1 V_1/(V_1+V_2)$, порция 2 — $p_2 V_2/(V_1+V_2)$. Давление смеси равно сумме этих парциальных давлений (закон Дальтона), то есть тот же результат.



Давление смеси лежит между p_1 и p_2: расстояния от него до p_1 и до p_2 относятся как $h_2 : h_1$ — как правило рычага

Обратите внимание: давление p нельзя искать как $p_1 + p_2$ или как среднее $(p_1 + p_2)/2$: порции расширяются, и вклад каждой взвешен по объёму. Объём воды в закон не входит, так как вода несжимаема и воздух её не занимает ни в начале, ни в конце.

Проверка. Размерность: $\rho g h$ — давление, $h_2/(h_1 + h_2)$ безразмерно. Пределы: при $h \to 0$ имеем $p_2 = p_1$ и $p = p_1$; при $h_2 \to 0$ воздуха под поршнем нет, и $p = p_1$; при $h_1 \to 0$ весь воздух был под поршнем, и $p = p_1 + \rho g h = p_2$. Знак: $p > p_1$, потому что воздух из нижней, более сжатой порции прибавился к верхней. Давление смеси — среднее p_1 и p_2 с весами h_1 и h_2, как и показывает рисунок.

Ответ. $p = \dfrac{p_1 h_1 + p_2 h_2}{h_1 + h_2} = p_1 + \rho g h \dfrac{h_2}{h_1 + h_2}$.