Тело на подвижной горке

Задача 3. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 3] На горизонтальной поверхности покоится незакреплённая горка массой m с углом наклона одной грани к горизонту α. У основания горки на её наклонной грани находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени тело толкают вверх вдоль наклонной грани горки. Известно, что тело не «переваливает» через верхушку горки, а после подъёма возвращается обратно по наклонной грани. По какой траектории движется тело? Чему равна и как направлена скорость тела (относительно земли), когда оно возвращается на первоначальную высоту? Трение между всеми поверхностями отсутствует. Ответ обосновать.

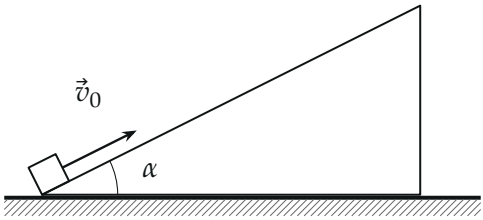
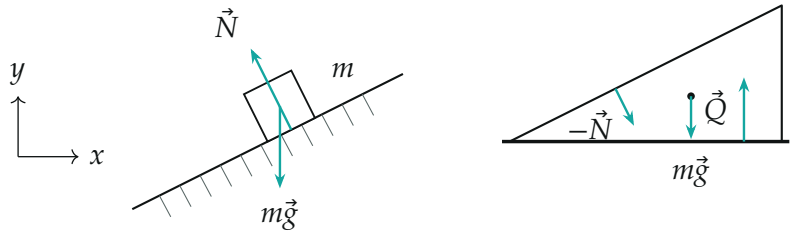


Рисунок условия: горка на горизонтальной поверхности и тело у основания наклонной грани

▲ **Решение.** **Что происходит.** Горка свободная, поэтому, пока тело скользит по грани, горка отъезжает назад по поверхности. На тело действуют только сила тяжести и реакция грани, перпендикулярная ей (трения нет). Мы увидим, что эта реакция всё время постоянна: ускорение тела постоянно, а значит, траектория — парабола. Для скорости нужны два закона: сохранение горизонтальной составляющей импульса системы «тело + горка» (внешние силы вертикальны) и кинематическая связь — тело не отрывается от грани, и его скорость относительно горки направлена вдоль неё.

Обозначения. Ось x направим горизонтально в сторону подъёма, ось y — вверх. v_x, v_y — проекции скорости тела относительно земли, V — проекция скорости горки (горка движется только по горизонтали), v_0 —

начальная скорость тела, $\vec{N}$ — реакция грани на тело. Рисунки построены для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, как на рисунке условия.



Силы на тело (слева) и на горку (справа); $-\vec{N}$ — реакция тела на горку по третьему закону Ньютона, $\vec{Q}$ — реакция поверхности

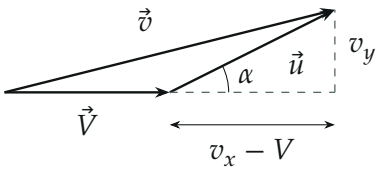
1. Силы и законы Ньютона. Реакция $\vec{N}$ перпендикулярна грани и направлена вверх и назад (в сторону, противоположную подъёму): её проекции $-N\sin\alpha$ на x и $N\cos\alpha$ на y. Горка получает от тела силу $-\vec{N}$; сила тяжести горки и реакция поверхности вертикальны, поэтому горизонтальная сила на горку — только $N\sin\alpha$ вперёд. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекциях на оси x и y и для горки в проекции на x:

$$ma_x = -N\sin\alpha, \qquad ma_y = N\cos\alpha - mg, \qquad mA = N\sin\alpha.$$

Отсюда $A = -a_x$: горизонтальные ускорения тела и горки равны по модулю и противоположны (одна и та же сила, одинаковые массы).

2. Связь скоростей. Пока тело на грани, его скорость относительно горки направлена вдоль грани: проекции $(v_x - V)$ и v_y связаны через угол α,

$$v_y = (v_x - V)\operatorname{tg}\alpha.$$



Сложение скоростей: скорость тела относительно земли $\vec{v}$ равна скорости горки $\vec{V}$ плюс скорость тела относительно горки $\vec{u}$; $\vec{u}$ направлена вдоль грани

Это верно в любой момент, поэтому продифференцируем по времени (угол α постоянен) и учтём $A = -a_x$:

$$a_y = (a_x - A)\operatorname{tg}\alpha = 2a_x \operatorname{tg}\alpha.$$

Подставим $a_x = -N\sin\alpha/m$ и $a_y = (N\cos\alpha - mg)/m$ из законов Ньютона:

$$\frac{N\cos\alpha - mg}{m} = -\frac{2N\sin^2\alpha}{m\cos\alpha}.$$

Отсюда

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}, \qquad a_x = -\frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}, \qquad a_y = -\frac{2g\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

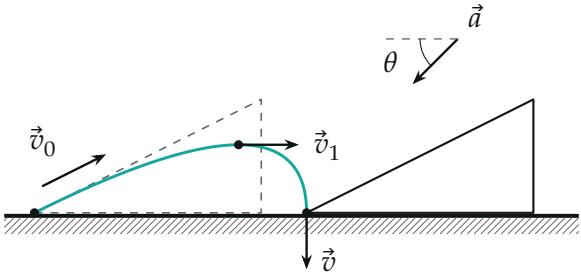
Реакция N не зависит от времени: она постоянна. Знаки словами: $a_x < 0$ — тело горизонтально тормозится (реакция тянет его назад), $a_y < 0$ — ускорение по вертикали направлено вниз.

Обратите внимание: $N \neq mg\cos\alpha$, как было бы у неподвижной горки. Горка уезжает, поэтому реакция меньше в $1+\sin^2\alpha$ раз.

3. Траектория. Ускорение тела $\vec{a} = (a_x, a_y)$ постоянно, поэтому

$$x = v_0\cos\alpha\, t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad y = v_0\sin\alpha\, t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Начальная скорость направлена вдоль грани, $v_y/v_x = \operatorname{tg}\alpha$, а ускорение — нет: $a_y/a_x = 2\operatorname{tg}\alpha \neq \operatorname{tg}\alpha$. Векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$ не параллельны, поэтому траектория — парабола, а не прямая. Её ось параллельна ускорению и направлена вниз и назад под углом θ к горизонту, где $\operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{tg}\alpha$.



Траектория тела относительно земли (для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$*:* $a_x = a_y = -g/3$*,* $\theta = 45°$*): пунктиром — горка в начале, сплошной — в конце;* $\vec{v}_1$ *— скорость в верхней точке*

4. Возвращение на первоначальную высоту. Вертикальная координата $y(t) = t(v_0 \sin\alpha + a_y t/2)$ обращается в нуль в начале и в момент $t_k = -2v_0 \sin\alpha / a_y$. К этому моменту $v_y = v_0 \sin\alpha + a_y t_k = -v_0 \sin\alpha$: вертикальная составляющая скорости только сменила знак — подъём и спуск симметричны, пока ускорение постоянно.

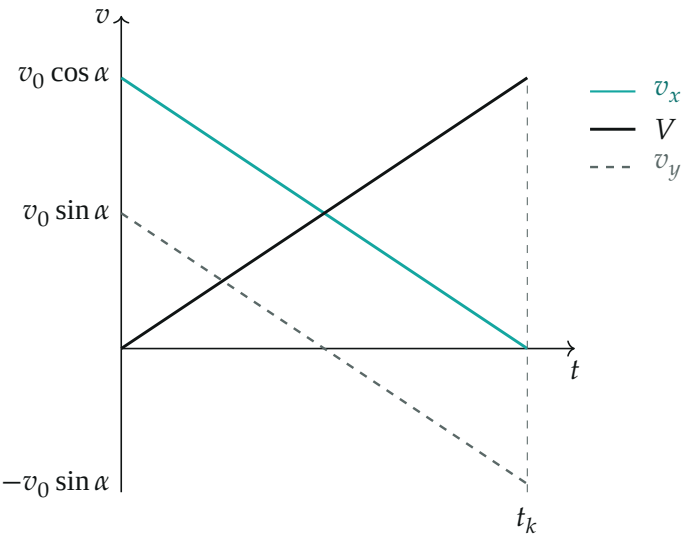
Горизонтальная составляющая. Внешние силы по горизонтали на систему «тело + горка» отсутствуют, поэтому сохраняется горизонтальная составляющая её импульса; в начале горка покоится:

$$mv_x + mV = mv_0 \cos\alpha.$$

В момент t_k связь скоростей из пункта 2 при $v_y = -v_0 \sin\alpha$ даёт $v_x - V = -v_0 \cos\alpha$. Сложим два уравнения и вычтем одно из другого:

$$v_x = 0, \qquad V = v_0 \cos\alpha.$$

Скорость тела вертикальна, направлена вниз и по модулю равна $v_0 \sin\alpha$.

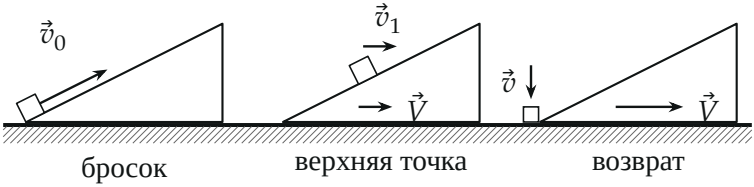


Скорости как функции времени: v_x падает до нуля, V растёт до $v_0 \cos\alpha$ (сумма постоянна), v_y меняет знак

Второй способ (энергия). Трения нет, поэтому механическая энергия системы сохраняется. В момент t_k тело и горка на тех же высотах, что и в начале, так что потенциальная энергия прежняя:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{mV^2}{2}, \qquad v_y^2 = v_0^2 \sin^2\alpha, \quad V = v_0 \cos\alpha - v_x.$$

Подстановка даёт $2v_x\,(v_x - v_0 \cos\alpha) = 0$. Корень $v_x = v_0 \cos\alpha$ — начальное состояние, второй корень $v_x = 0$ — искомое. Ответ тот же.



Три состояния: бросок; верхняя точка (скорости тела и горки равны $v_0 \cos\alpha/2$); возврат

Обратите внимание: горка не остаётся на месте, поэтому тело возвращается не в ту точку земли, откуда стартовало. Но на первоначальную высоту оно возвращается обязательно, и для скорости это неважно: сработали сохранение импульса и связь скоростей.

Проверка. Размерность: $v_0 \sin\alpha$ — скорость. Предел $\alpha \to 90°$: грань вертикальна, $N \to 0$, горка не движется, тело летит вверх и возвращается вниз со скоростью $v_0 = v_0 \sin 90°$ — как при свободном броске. Для $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ ускорение направлено под $45°$ к горизонту, а скорости удовлетворяют сохранению энергии в момент возврата. Физический смысл: за время подъёма и спуска горка набирает ровно столько горизонтального импульса, сколько тело теряет, и в конце весь импульс системы $mv_0 \cos\alpha$ оказывается у горки, а у тела остаётся только вертикальная скорость.

Ответ. Траектория — парабола (ось направлена вниз и назад, $\operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{tg}\alpha$). При возвращении на первоначальную высоту скорость тела вертикальна, направлена вниз, $v = v_0 \sin\alpha$.