Стержень на двух нитях

Задача 4. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Тонкий однородный массивный стержень массой m и длиной $3l/2$ подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях длиной l и $2l$, которые прикреплены к концам стержня и к одной точке горизонтального потолка (см. рис.). Найти силы натяжения нитей.

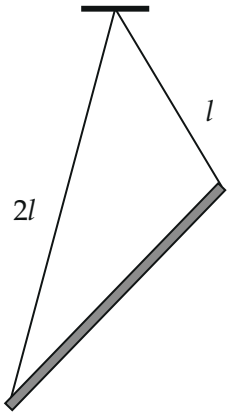
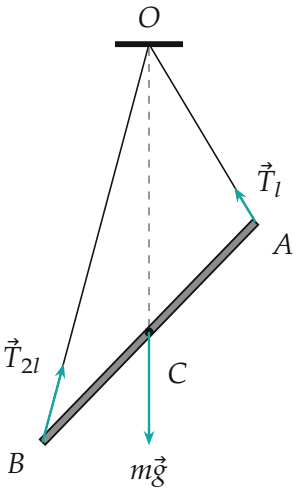


Рисунок условия: стержень на двух нитях длиной l и $2l$

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень висит в равновесии под действием трёх сил: силы тяжести $m\vec{g}$, приложенной к его середине, и двух натяжений, направленных вдоль нитей к точке подвеса. Главная идея: нити сходятся в одной точке, поэтому по правилу трёх сил линия действия $m\vec{g}$ тоже проходит через неё — середина стержня находится прямо под точкой подвеса. Дальше геометрия (треугольник из двух нитей и стержня) и векторное уравнение равновесия: оно покажет, что натяжение каждой нити пропорционально её длине.

Качественно: нить, которая ближе к вертикали, несёт больше. Длинная нить $2l$ идёт круче, поэтому её натяжение должно оказаться больше.

Обозначения. O — точка подвеса, A — конец стержня, к которому прикреплена нить длиной l, B — конец с нитью длиной $2l$, C — середина стержня (центр масс). T_l и T_{2l} — натяжения нитей OA и OB.

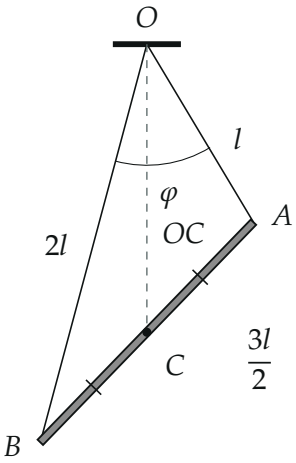


Силы на стержень: линия действия $m\vec{g}$ (пунктир) проходит через точку подвеса O

1. Где находится центр стержня. Запишем правило моментов относительно точки O. Линии действия обоих натяжений проходят через O, поэтому их моменты относительно O равны нулю. Значит, должен быть равен нулю и момент силы тяжести: её линия действия проходит через O, то есть центр стержня C лежит на вертикали, проведённой через O. Точку O выбрали потому, что в ней обращаются в нуль моменты обеих неизвестных сил.

2. Длина OC. Стержень однородный, поэтому C — середина отрезка AB, и OC — медиана треугольника OAB со сторонами $OA = l$, $OB = 2l$, $AB = 3l/2$. Достроим треугольник до параллелограмма: сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон, $(2OC)^2 + AB^2 = 2\,(OA^2 + OB^2)$. Отсюда

$$4\,OC^2 = 2\,(l^2 + 4l^2) - \frac{9l^2}{4} = \frac{31}{4}\,l^2 \quad \Rightarrow \quad OC = \frac{\sqrt{31}}{4}\,l \approx 1{,}39\,l.$$



Треугольник из нитей и стержня: C — середина AB, OC — медиана и вертикаль; φ — угол между нитями

3. Натяжения пропорциональны длинам нитей. Обозначим $k_1 = T_l/l$ и $k_2 = T_{2l}/(2l)$. Сила натяжения направлена вдоль нити к O, а векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ имеют длины l и $2l$. Поэтому $\vec{T}_l = -k_1\vec{a}$, $\vec{T}_{2l} = -k_2\vec{b}$. Запишем условие равновесия $\vec{T}_l + \vec{T}_{2l} + m\vec{g} = 0$:

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} = m\vec{g}.$$

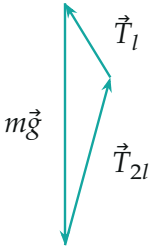
Перепишем левую часть через сумму и разность векторов:

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} = \frac{k_1 + k_2}{2}\,(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{k_1 - k_2}{2}\,(\vec{a} - \vec{b}).$$

Здесь $\vec{a} + \vec{b} = 2\,\overrightarrow{OC}$ — вертикальный вектор (пункт 1), $m\vec{g}$ тоже вертикальна, а $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$ направлен вдоль стержня, и стержень не вертикален. Поэтому второе слагаемое обязано равняться нулю, то есть $k_1 = k_2 = k$:

$$T_l = kl, \qquad T_{2l} = 2kl.$$

Силы натяжения пропорциональны длинам нитей, $T_{2l} = 2T_l$.



Треугольник сил: $\vec{T}_{2l} + \vec{T}_l + m\vec{g} = 0$; стороны параллельны нитям и вертикали

4. Величина k. Теперь уравнение из пункта 3 даёт $k(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{g}$, то есть $2k\,OC = mg$. Подставим OC из пункта 2:

$$k = \frac{mg}{2\,OC} = \frac{2mg}{\sqrt{31}\,l} \quad \Rightarrow \quad T_l = kl = \frac{2}{\sqrt{31}}\,mg, \qquad T_{2l} = 2kl = \frac{4}{\sqrt{31}}\,mg.$$

Второй способ (моменты относительно центра). Запишем правило моментов относительно середины стержня C: сила тяжести момента не создаёт, поэтому моменты натяжений равны по модулю: $T_l\,d_A = T_{2l}\,d_B$. Плечи — расстояния от C до линий нитей:

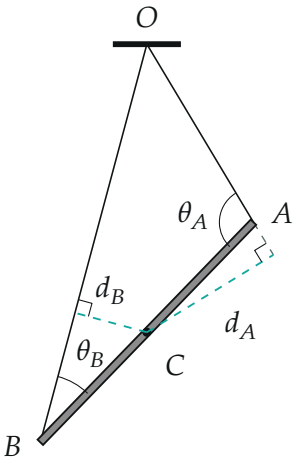
$$d_A = \frac{3l}{4}\sin\theta_A, \qquad d_B = \frac{3l}{4}\sin\theta_B,$$

где θ_A, θ_B — углы между стержнем и нитями на его концах. По теореме синусов для треугольника OAB имеем $l/\sin\theta_B = 2l/\sin\theta_A$, то есть $\sin\theta_A = 2\sin\theta_B$, и из равенства моментов снова $T_{2l} = 2T_l$.

Величину можно найти и из суммы сил: теорема косинусов для сторон l, $2l$, $3l/2$ даёт $\cos\varphi = 11/16$ для угла между нитями, и

$$m^2g^2 = T_l^2 + T_{2l}^2 + 2T_lT_{2l}\cos\varphi = \frac{31}{4}\,T_l^2,$$

откуда снова $T_l = 2mg/\sqrt{31}$.



Плечи натяжений относительно середины стержня C — перпендикуляры к линиям нитей

Обратите внимание: натяжения нельзя считать равными по «симметрии» — нити разной длины, и стержень наклонён. Равны не силы, а их отношения к длинам нитей, $T_l/l = T_{2l}/(2l)$.

Проверка. Размерность: $2/\sqrt{31}$ и $4/\sqrt{31}$ безразмерны. Нити составляют с вертикалью углы с косинусами 0,853 (нить l) и 0,965 (нить $2l$) и синусами 0,522 и 0,261 — из координат треугольника. Горизонтальные составляющие равны: $0{,}359 \cdot 0{,}522 = 0{,}718 \cdot 0{,}261$, вертикальные дают $0{,}359 \cdot 0{,}853 + 0{,}718 \cdot 0{,}965 \approx 1{,}00$ в единицах mg. Предел: при двух нитях по l из $k = mg/(2\,OC)$ и $OC = \sqrt{7}\,l/4$ получаем $T = 2mg/\sqrt{7} = mg/(2\cos\beta)$, где $\cos\beta = OC/l = \sqrt{7}/4$ — косинус угла каждой нити с вертикалью; это и есть ответ для симметричного подвеса, где каждая нить держит половину веса по вертикали. Смысл: натяжение на единицу длины нити у обеих нитей одинаково, как у двух пружин одинаковой жёсткости и нулевой длины в недеформированном состоянии, сходящихся в одной точке.

Ответ. $T_{2l} = \dfrac{4}{\sqrt{31}}\,mg \approx 0{,}72\,mg$ (нить длиной $2l$); $T_l = \dfrac{2}{\sqrt{31}}\,mg \approx 0{,}36\,mg$ (нить длиной l).