Два соленоида и частица

Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Два соленоида с одинаковым числом витков и одинаковой длины изготовлены из одного и того же провода. Радиус одного соленоида $R_1 = R$ втрое меньше радиуса другого $R_2 = 3R$. В пространстве между соленоидами покоится заряженная частица. Соленоиды соединили параллельно и подключили к источнику электрического напряжения U, которое увеличивается с постоянной скоростью с течением времени $U = \alpha t$, где α — некоторая постоянная. В результате в соленоидах потёк электрический ток так, как показано на рисунке (стрелками), а частица стала двигаться по окружности. Найти её радиус. Силой тяжести и самоиндукцией пренебречь.

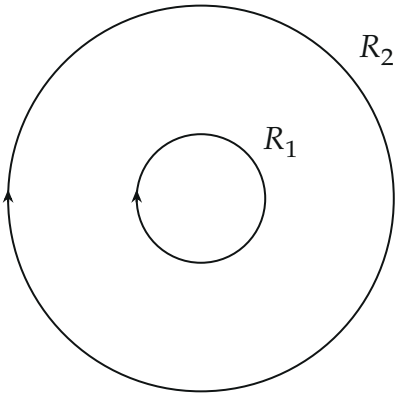


Рисунок условия: вид вдоль общей оси, малый соленоид внутри большого

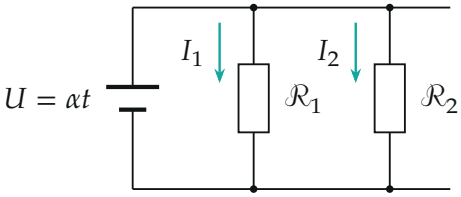
▲ **Решение. Что происходит.** Токи растут пропорционально времени, поэтому магнитное поле соленоидов тоже растёт. Меняющееся поле создаёт вихревое электрическое поле, которое разгоняет частицу вдоль окружности вокруг оси, а магнитное поле между соленоидами заставляет её поворачивать и удерживает на той же окружности. Главная идея: касательная составляющая силы (от электрического поля) и радиальная (от магнитного) должны быть согласованы в каждый момент — это условие и определяет радиус. Класс задачи — индукция: токи → поля → ЭДС → вихревое поле → механика.

Обозначения. Число витков на единицу длины n у обоих соленоидов одинаково (одинаковые число витков и длина); соленоиды длинные, поле каждого есть только внутри него. Малый соленоид — номер 1 (радиус R), большой — номер 2 (радиус $3R$). $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ — сопротивления, I_1, I_2 — токи. Для краткости $I = I_2$ и $B_0 = \mu_0 nI$. q и m — заряд и масса частицы (на рисунках $q > 0$), r — радиус её окружности.

1. Токи. Сопротивление провода пропорционально его длине. Число витков одинаково, а длина одного витка пропорциональна радиусу, поэтому $\mathcal{R}_2 = 3\mathcal{R}_1$. При параллельном соединении к обоим соленоидам приложено одно напряжение U; закон Ома для каждого:

$$I_1 = \frac{U}{\mathcal{R}_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{\mathcal{R}_2} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 3I_2 = 3I.$$

В малом соленоиде ток втрое больше.

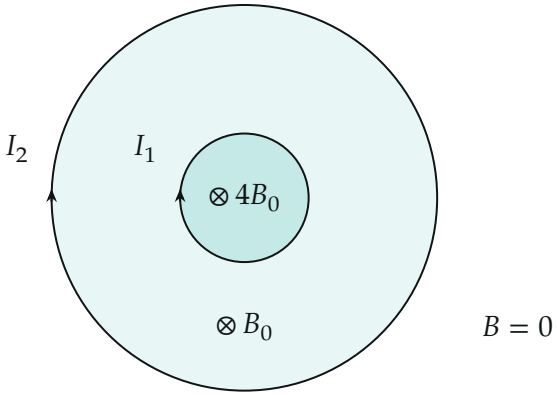


Параллельное соединение: напряжение одно, ток обратно пропорционален сопротивлению

2. Магнитное поле. Внутри длинного соленоида $B = \mu_0 nI$, вне его поле равно нулю. Токи обоих соленоидов идут в одну сторону, поэтому внутри малого соленоида поля складываются, а в пространстве между соленоидами есть только поле большого:

$$B_{\text{вн}} = \mu_0 n(I_1 + I_2) = 4B_0, \qquad B_{\text{зазор}} = \mu_0 nI_2 = B_0.$$

Направление поля найдём по рисунку условия: в левых точках витков ток идёт вверх, то есть по часовой стрелке. По правилу правого винта ток по часовой стрелке даёт поле, направленное от нас (за плоскость рисунка), — так направлены оба поля.



Поле в трёх областях: внутри малого соленоида $4B_0$, в зазоре B_0, снаружи ноль; поле направлено от нас ($\otimes$)

Самоиндукцией пренебрегаем, поэтому ток следует за напряжением: $I = \alpha t/\mathcal{R}_2$, и $B_0 = \mu_0 n\alpha t/\mathcal{R}_2$ растёт пропорционально времени. Скорость роста $\dot{B}_0 = \mu_0 n\alpha/\mathcal{R}_2$ постоянна.

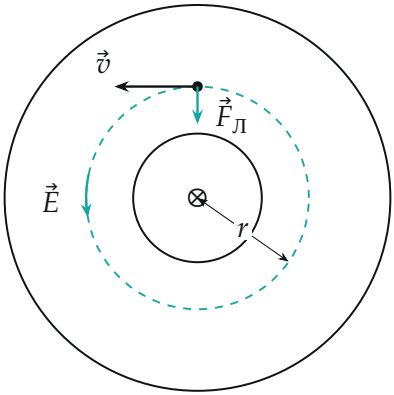
3. Вихревое электрическое поле. Из осевой симметрии линии электрического поля — окружности вокруг оси, а его модуль E одинаков на всей окружности радиуса r (между соленоидами). Закон электромагнитной индукции для контура-окружности радиуса r: циркуляция $E \cdot 2\pi r$ равна скорости изменения потока через круг. Поток складывается из потока через круг малого соленоида и через кольцо вокруг него:

$$\Phi = 4B_0 \cdot \pi R^2 + B_0 \cdot \pi(r^2 - R^2) = \pi B_0\,(r^2 + 3R^2).$$

Отсюда, так как $\dot{B}_0$ постоянна,

$$2\pi r\,E = \pi \dot{B}_0\,(r^2 + 3R^2) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{(r^2 + 3R^2)\,\dot{B}_0}{2r}.$$

Поток от нас растёт, поэтому по правилу Ленца вектор $\vec{E}$ направлен против часовой стрелки: ток, пущенный по контуру в эту сторону, создавал бы поле к нам и мешал бы росту потока.



Вид вдоль оси: частица на окружности радиуса r; $\vec{E}$ — вихревое поле (против часовой стрелки), $\vec{v}$ — скорость, $\vec{F}_Л$ — сила Лоренца к центру

4. Условие движения по окружности. Рассмотрим произвольный момент времени. Магнитная сила перпендикулярна скорости и не меняет её модуль, поэтому проекция второго закона Ньютона на касательную к окружности:

$$m\frac{dv}{dt} = qE.$$

Проекция на радиус: центростремительное ускорение создаёт сила Лоренца в поле B_0 (в зазоре):

$$\frac{mv^2}{r} = qvB_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qB_0 r}{m}.$$

Радиус окружности постоянен, поэтому продифференцируем скорость по времени: $m\,dv/dt = qr\dot{B}_0$. Приравняем к касательной проекции: $qE = qr\dot{B}_0$, то есть

$$E = r\,\dot{B}_0.$$

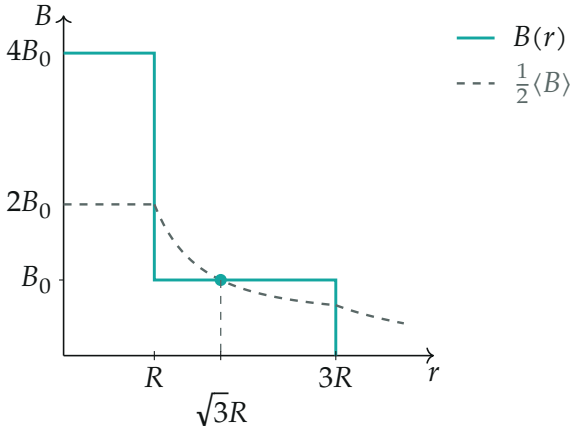
Подставим E из пункта 3:

$$\frac{r^2 + 3R^2}{2r} = r \quad \Rightarrow \quad r^2 = 3R^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{3}\,R \approx 1{,}73\,R.$$

Это значение лежит между соленоидами ($R < r < 3R$), как и должно быть. При $q < 0$ меняются направления $\vec{E}$ и $\vec{v}$, а сила Лоренца по-

прежнему направлена к центру.

Второй способ. Запишем поток через среднее поле по кругу, $\Phi = \pi r^2 \langle B\rangle$: тогда $E = r\,\langle \dot B\rangle/2$, и условие $E = r\dot B_0$ превращается в $B_0 = \frac{1}{2}\langle B\rangle$ — поле на орбите вдвое меньше среднего поля внутри неё (как в бетатроне). Здесь $\langle B\rangle = B_0\,(r^2 + 3R^2)/r^2$, и равенство опять даёт $r^2 = 3R^2$.



Условие $B_0 = \frac{1}{2}\langle B\rangle$: пунктирная кривая — половина среднего поля по кругу радиуса r; она пересекает ступеньку $B(r)$ при $r = \sqrt{3}R$

Обратите внимание: поток малого соленоида входит в ЭДС, хотя на самой орбите его поле равно нулю — индукция определяется потоком через всю площадь контура, а не полем в точках окружности. Если бы малого соленоида не было, поток через круг был бы $\pi r^2 B_0$, поле $E = r\dot B_0/2$ оказалось бы вдвое меньше нужного, и окружности не получилось бы ни при каком r.

Проверка. Размерность: $r = \sqrt{3}R$ — длина. Для отношения токов $I_1/I_2 = k$ имеем $\Phi = \pi B_0(r^2 + kR^2)$ и $r = \sqrt{k}\,R$; при $k = 3$ — наш ответ. Численный расчёт на python (уравнения движения заряда в полях $\vec E$ и $\vec B$, $q/m = 1$, $R = 1$): частица, стартующая из покоя при $r_0 = \sqrt{3}R$, остаётся на окружности с точностью 10^{-11}, а при $r_0 = 1{,}3R$ и $2{,}2R$ уходит с неё. Смысл: разгон и удержание растут согласованно только там, где поле на орбите вдвое меньше среднего.

Ответ. $r = \sqrt{3}\,R$.