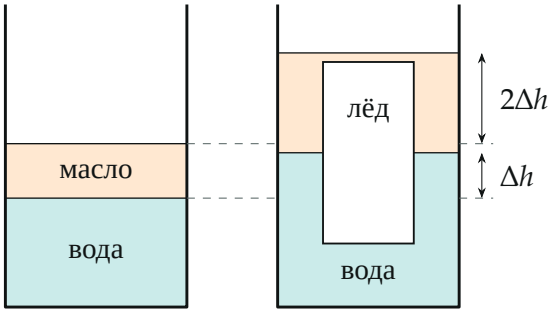
Лёд в воде и масле

Задача 1. [Росатом 2021/22, 7 класс, задача 1] В цилиндрический сосуд налита вода плотности $\rho_в = 1$ г/см^3, а поверх неё слой масла с плотностью $\rho_м = 0{,}8$ г/см^3. Когда в сосуд опустили кусок водяного льда, уровень воды поднялся на $\Delta h = 5$ см, а уровень масла поднялся на $2\Delta h$, и лёд был полностью погружен в жидкость. На сколько изменятся уровни воды и масла, когда лёд растает? Плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3. Вода и масло не перемешиваются.



Поясняющий рисунок (в масштабе): до льда и со льдом. Под «уровнем воды» понимаем границу вода–масло

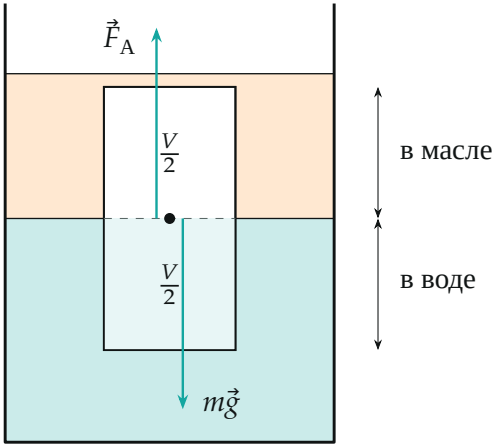
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на закон Архимеда и сохранение массы. По подъёму двух уровней узнаём, какая доля льда находится в воде, а какая — в масле. При таянии масса льда сохраняется, а объём уменьшается: вода из льда занимает 0,9 его объёма. Удобно сравнивать всё с исходным состоянием «без льда»: уровни отсчитываем от него.

Обозначения. S — площадь дна сосуда, V — объём льда, $V_в$ — его часть ниже границы вода–масло, $V_м$ — часть в масле. Все подъёмы уровней — относительно состояния до того, как опустили лёд.

1. Где находится лёд. Граница вода–масло поднялась на Δh потому, что ниже неё объём $V_в$ занят льдом: объём воды не изменился, а ей стало тесно на $V_в$. Верхний уровень масла поднялся потому, что ниже него теперь весь лёд V:

$$S\,\Delta h = V_в, \qquad S \cdot 2\Delta h = V.$$

Отсюда $V_в = \dfrac{V}{2}$, $V_м = \dfrac{V}{2}$: лёд наполовину в воде, наполовину в масле, и $\dfrac{V}{S} = 2\Delta h = 10$ см.



Лёд на границе жидкостей: половина объёма в воде, половина в масле; сила Архимеда — сумма выталкивающих сил воды и масла

2. Проверка равновесия льда. Лёд не лежит на дне и не всплывает выше масла — он в равновесии внутри жидкости. Второй закон Ньютона для льда в проекции на вертикаль: сила тяжести равна сумме выталкивающих сил воды и масла (закон Архимеда для каждой части):

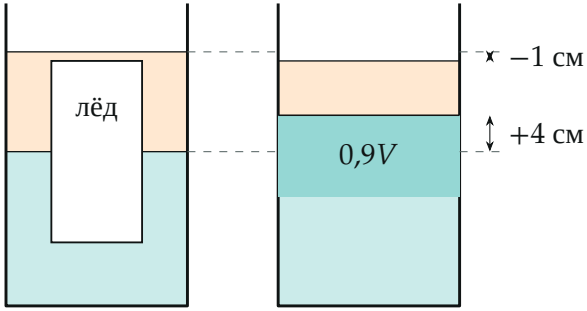
$$\rho_л V g = \rho_в \frac{V}{2} g + \rho_м \frac{V}{2} g \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9 = \frac{1 + 0{,}8}{2} = 0{,}9.$$

Равенство выполняется — данные условия согласованы: лёд действительно плавает на границе и погружён в воду ровно наполовину.

3. Таяние: закон сохранения массы. Масса льда $\rho_л V$ превращается в воду той же массы, объём которой

$$V_т = \frac{\rho_л}{\rho_в} V = 0{,}9\, V.$$

Талая вода тяжелее масла и уходит в нижний слой. Льда больше нет.



До и после таяния: талая вода $0{,}9V$ (тёмная полоса) поднимает границу вода–масло, а верхний уровень опускается: $0{,}9V < V$

4. Уровень воды. Без льда граница вода–масло была на исходной высоте. После таяния под ней прибавилась талая вода $0{,}9V$, поэтому граница выше исходной на

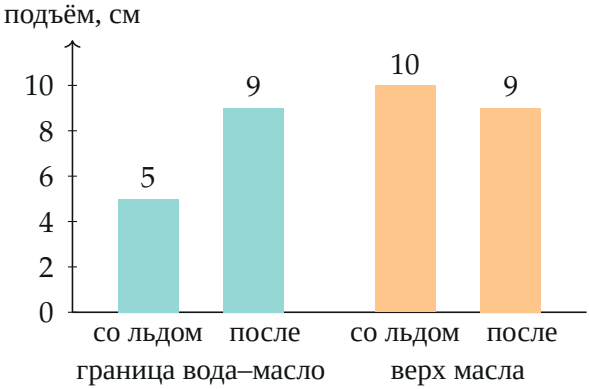
$$\frac{0{,}9V}{S} = 0{,}9 \cdot 10 \text{ см} = 9 \text{ см}.$$

Со льдом она была выше исходной на $\Delta h = 5$ см, значит, при таянии уровень воды *поднимается* на

$$\Delta h_1 = 0{,}9 \cdot 2\Delta h - \Delta h = 0{,}8\,\Delta h = 4 \text{ см}.$$

5. Уровень масла. Объём масла не меняется, поэтому верхний уровень сдвигается так же, как граница под ним, по отношению к исходному: на 9 см выше исходного. Со льдом он был выше исходного на $2\Delta h = 10$ см, значит, при таянии уровень масла *опускается* на

$$\Delta h_2 = 2\Delta h - 0{,}9 \cdot 2\Delta h = 0{,}2\,\Delta h = 1 \text{ см}.$$



Подъём уровней относительно состояния без льда: граница вода–масло $5 \to 9$ *см, верх масла* $10 \to 9$ *см*

Обратите внимание: «уровень воды» здесь — граница вода–масло, а не поверхность жидкости в сосуде. Уровень масла сам по себе не следует за уровнем воды: он поднимается и с водой (на 9 см), и из-за льда в масле, который при таянии исчезает.

Ответ. $V_в = V_м = \dfrac{V}{2}$, $\Delta h_1 = \left(2\dfrac{\rho_л}{\rho_в} - 1\right)\Delta h = 4$ см (вверх), $\Delta h_2 = 2\left(1 - \dfrac{\rho_л}{\rho_в}\right)\Delta h = 1$ см (вниз).

Проверка. Размерность — сантиметры. Второй способ для уровня масла: верх сосуда определяется полным объёмом всего, что под ним. Со льдом там $V_{воды} + V_{масла} + V$, после — $V_{воды} + V_{масла} + 0{,}9V$; разница $0{,}1V = 0{,}1 \cdot 10\ \text{см} \cdot S$, то есть уровень опускается на 1 см — то же. Предел: если бы лёд имел плотность воды ($\rho_л = \rho_в$), верх масла не сдвинулся бы, а граница поднялась бы на $V/(2S) = \Delta h$, вобрав объём из масляной части — формулы дают $\Delta h_2 = 0$, $\Delta h_1 = \Delta h$.

Смысл: половина льда «сидела» в масле, а талая вода целиком уходит вниз — поэтому граница поднимается, а общий уровень немного падает, потому что лёд объёмнее своей воды.

Ответ. Уровень воды поднимется на $\Delta h_1 = 4$ см, уровень масла опустится на $\Delta h_2 = 1$ см.