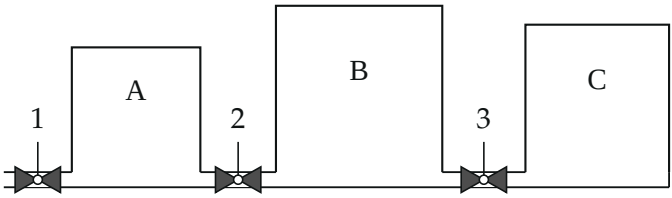
Три сосуда и краны

Задача 2. [Росатом 2021/22, 7 класс, задача 2] Три сосуда A, B и C соединены двумя трубками с кранами 2 и 3. Сосуд A сообщается с атмосферой через трубку с краном 1. Первоначально все краны закрыты, из сосудов откачан воздух. Если открыть кран 1, в сосуде A окажется масса воздуха m. Если теперь закрыть кран 1 и открыть кран 2, в сосуде B окажется масса воздуха $7m/9$. Если теперь открыть кран 3 (не меняя положения других кранов), в сосуде C окажется масса воздуха $m/4$. Какая масса воздуха будет в сосуде C, если открыть все три крана? Воздух равномерно заполняет весь доступный ему объём.



▲ **Решение. Что происходит.** Воздух при закрытом кране 1 никуда не уходит: его масса m сохраняется и, по условию, равномерно распределяется по всем открытым сосудам — массы в сосудах пропорциональны их объёмам. Так из второго и третьего опытов находим отношения объёмов. В последнем опыте открыт кран 1: сосуды сообщаются с атмосферой, и воздуха в них не фиксированная масса, а атмосферная *плотность*. Класс задачи — сохранение массы и пропорциональность массы объёму при одинаковой плотности.

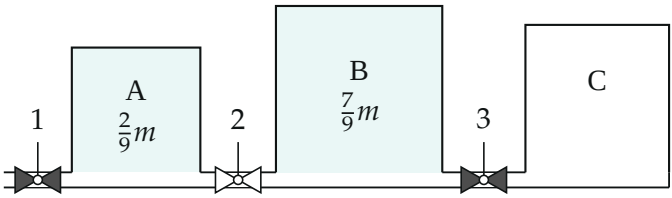
Обозначения. V_A, V_B, V_C — объёмы сосудов (объёмом трубок пренебрегаем, температура не меняется), ρ_0 — плотность воздуха в атмосфере. На рисунках чем темнее заливка, тем плотнее воздух; открытый кран — светлый.

1. Кран 1 открыт: плотность атмосферы. Воздух входит в сосуд A, пока давление и плотность в нём не сравняются с атмосферными. Масса в A — m, поэтому

$$\rho_0 = \frac{m}{V_A}.$$

2. Кран 1 закрыт, кран 2 открыт. Масса воздуха в системе A+B не меняется (закон сохранения массы) и равна m. Воздух равномерно заполняет оба сосуда, поэтому масса в каждом пропорциональна его объёму:

$$m_\text{B} = \frac{V_\text{B}}{V_\text{A}+V_\text{B}}\,m = \frac{7}{9}\,m \quad\Rightarrow\quad 9V_\text{B} = 7V_\text{A} + 7V_\text{B} \quad\Rightarrow\quad V_\text{B} = \frac{7}{2}\,V_\text{A}.$$



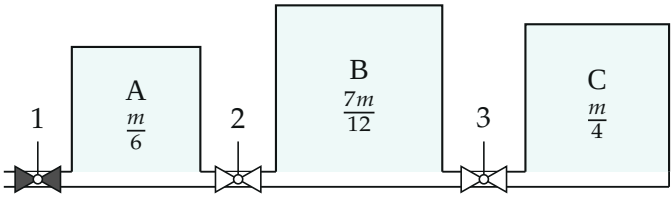
Опыт 2: та же масса m в объёме $V_A + V_B = \frac{9}{2}V_A$; плотность упала в 4,5 раза

3. Открыт ещё кран 3. Та же масса m распределяется по трём сосудам:

$$m_\text{C} = \frac{V_\text{C}}{V_\text{A}+V_\text{B}+V_\text{C}}\,m = \frac{m}{4},$$

$$3V_\text{C} = V_\text{A} + V_\text{B} = \frac{9}{2}V_\text{A} \quad\Rightarrow\quad V_\text{C} = \frac{3}{2}\,V_\text{A}.$$

Объёмы относятся как $V_\text{A} : V_\text{B} : V_\text{C} = 2 : 7 : 3$.

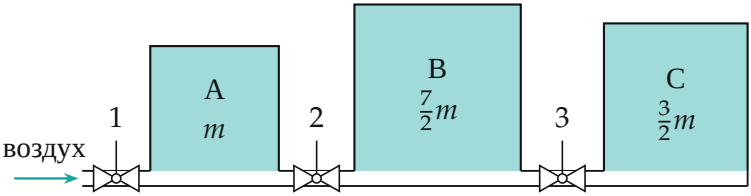


Опыт 3: масса m делится в отношении объёмов $2 : 7 : 3$

4. Все краны открыты. Теперь система сообщается с атмосферой через кран 1, и воздух входит, пока плотность во всех сосудах не станет

атмосферной ρ_0. Масса в C:

$$m_C = \rho_0 V_C = \frac{m}{V_A} \cdot \frac{3}{2} V_A = \frac{3}{2} m.$$



Опыт 4: во всех сосудах атмосферная плотность; массы m, $\frac{7}{2}m$, $\frac{3}{2}m$ пропорциональны объёмам

Обратите внимание: в последнем опыте масса воздуха *не* равна m — кран 1 открыт, и воздух докачивается из атмосферы. Если распределять по сосудам ту же массу m, получится $m/4$, как в опыте 3, что неверно.

Ответ. $V_B = \frac{7}{2}V_A$, $V_C = \frac{3}{2}V_A$, $\quad m_C = \rho_0 V_C = \frac{3}{2} m.$

Проверка. Размерность — килограммы. Второй способ: в опыте 3 плотность воздуха в $\dfrac{V_A + V_B + V_C}{V_A} = 6$ раз меньше атмосферной, а в C было $m/4$. При атмосферной плотности масса в C в 6 раз больше: $6 \cdot \dfrac{m}{4} = \dfrac{3}{2}m$ — то же. Сумма масс в опыте 4: $m + \frac{7}{2}m + \frac{3}{2}m = 6m$ — вшестеро больше, чем в опытах 2 и 3, как и должно быть при вшестеро большей плотности.

Смысл: сосуд C в полтора раза больше A, а при одинаковой (атмосферной) плотности масса пропорциональна объёму.

Ответ. $m_C = \dfrac{3}{2} m.$