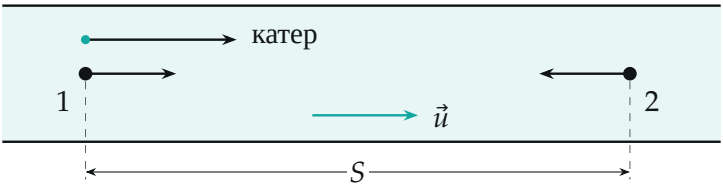
Катер между кораблями

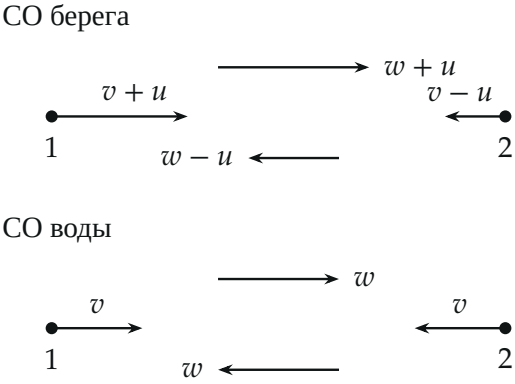
Задача 5. [Росатом 2021/22, заключительный этап, 7 класс, задача 5] По реке, скорость течения которой равна u, навстречу друг другу плывут два корабля. В некоторый момент времени, когда расстояние между кораблями равнялось S, от корабля, который плыл по течению, отплывает быстроходный катер. Когда катер доплывает до второго корабля, он разворачивается, плывёт к первому кораблю, разворачивается и далее курсирует между кораблями. Какой путь проходит катер до момента встречи кораблей? Скорость кораблей в стоячей воде — v, скорость катера в стоячей воде — w. Корабли и катер считать точечными. Катер разворачивается мгновенно.



Поясняющий рисунок: корабль 1 *плывёт по течению, корабль* 2 *— против; катер стартует от корабля* 1

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Число рейсов катера бесконечно, и складывать их по одному долго. Зато в системе отсчёта воды всё симметрично: корабли сближаются со скоростями v каждый, а катер в обе стороны плывёт с одной скоростью w. В этой системе легко найти время до встречи и *суммарные* времена движения катера в каждую сторону; путь относительно берега затем складывается из двух равномерных движений.

Обозначения. Ось x — вдоль реки по течению, начало — у корабля 1 в момент старта катера. t — время до встречи кораблей; t_1 — суммарное время, когда катер плывёт по течению, t_2 — против течения; L — искомый путь относительно берега. Считаем $w > v$ и $w > u$ (иначе катер не догонит корабль или не выгребет против течения).



Скорости кораблей и катера относительно берега и относительно воды (закон сложения скоростей: $\vec{v}_{бер} = \vec{v}_{вод} + \vec{u}$)

1. Переходим в систему отсчёта воды. По закону сложения скоростей скорость тела относительно берега равна его скорости относительно воды плюс скорость воды $\vec{u}$. Скорости кораблей и катера «в стоячей воде» — это и есть их скорости относительно воды. Поэтому в СО воды корабль 1 плывёт со скоростью v по оси x, корабль 2 — со скоростью v против оси, катер — со скоростью w в ту сторону, куда плывёт.

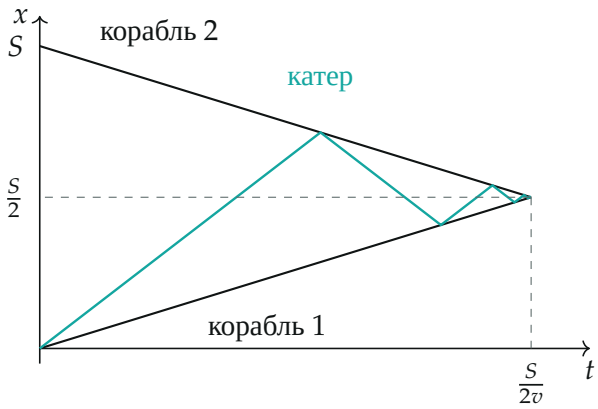
2. Время до встречи. В СО воды корабли сближаются со скоростью $v + v = 2v$ и проходят расстояние S (расстояние одно и то же в любой СО):

$$t = \frac{S}{2v}.$$

Катер курсирует всё это время: $t_1 + t_2 = t$.

3. Перемещение катера в СО воды. Корабли в СО воды встречаются посередине: каждый проходит $vt = S/2$. Катер стартовал от корабля 1 и в момент встречи оказался там же, где оба корабля (рейсы становятся всё короче и сходятся к точке встречи). Значит, его перемещение по оси x в СО воды равно $S/2$. Проекция перемещения — сумма проекций за время движения вперёд и назад:

$$w\,t_1 - w\,t_2 = \frac{S}{2}.$$



Графики $x(t)$ в СО воды (расчёт для $u = 1$, $v = 2$, $w = 5$, $S = 10$): ломаная катера заканчивается в точке встречи $x = S/2$; наклон всех её звеньев одинаков по модулю

4. Решаем систему. Складываем и вычитаем уравнения $t_1 + t_2 = \dfrac{S}{2v}$ и $t_1 - t_2 = \dfrac{S}{2w}$:

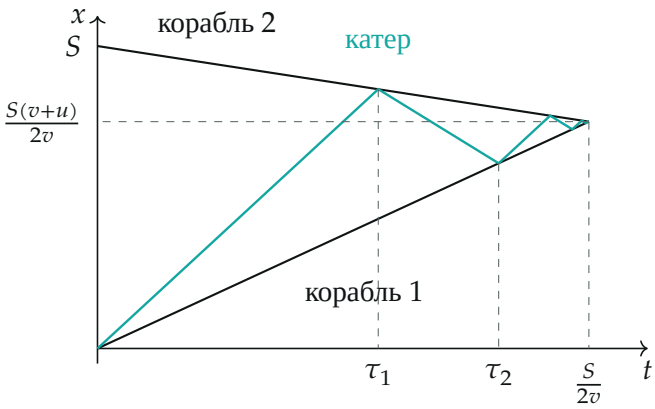
$$t_1 = \frac{S}{4v} + \frac{S}{4w}, \qquad t_2 = \frac{S}{4v} - \frac{S}{4w}.$$

При $w > v$ оба времени положительны.

5. Путь относительно берега. Каждое звено ломаной катер проходит равномерно: по течению со скоростью $w + u$ (относительно берега), против — со скоростью $w - u$ (при $w > u$ катер действительно плывёт против течения, а не сносится). Путь — сумма длин звеньев:

$$L = (w + u)\, t_1 + (w - u)\, t_2 = w\,(t_1 + t_2) + u\,(t_1 - t_2),$$

$$L = \frac{wS}{2v} + \frac{uS}{2w} = \frac{S\,(w^2 + uv)}{2vw}.$$



Те же графики в СО берега: моменты разворотов $\tau_1, \tau_2, \ldots$ те же, что в СО воды, а наклоны звеньев катера — $w+u$ и $-(w-u)$

Обратите внимание: суммарное время t_1 больше, чем t_2, на $S/(2w)$. Поэтому путь в СО берега больше пути в СО воды (wt) на $u(t_1 - t_2) = uS/(2w)$ — течение «помогает» дольше, чем «мешает». Если считать $t_1 = t_2$, теряется второе слагаемое ответа.

Ответ. $t = \dfrac{S}{2v}$, $\quad t_1 - t_2 = \dfrac{S}{2w}$, $\quad L = (w+u)\,t_1 + (w-u)\,t_2 = \dfrac{S\,(w^2+uv)}{2vw}$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{м}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м}$. Предел $u = 0$: $L = \dfrac{wS}{2v}$ — катер всё время $S/(2v)$ плывёт со скоростью w, верно. Второй способ — прямой расчёт по рейсам на компьютере (рейс за рейсом, пока корабли не сошлись) при $S = 10$, $u = 1$, $v = 2$, $w = 7$: путь 18,2143, по формуле $\dfrac{10\cdot(49+2)}{28} = 18{,}2143$.

Смысл: по сравнению со стоячей водой течение добавляет к пути $\dfrac{uS}{2w}$ — ровно смещение $u(t_1 - t_2)$ за лишнее время движения по течению.

Ответ. $L = \dfrac{S\,(w^2+uv)}{2vw}$.