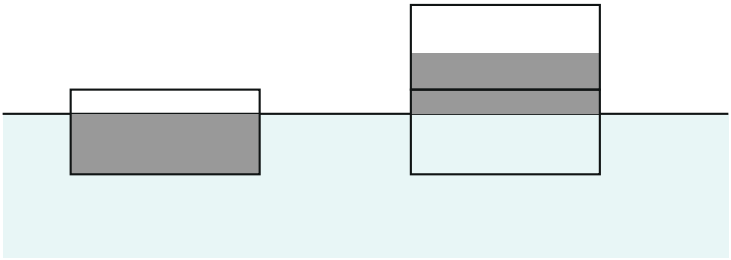
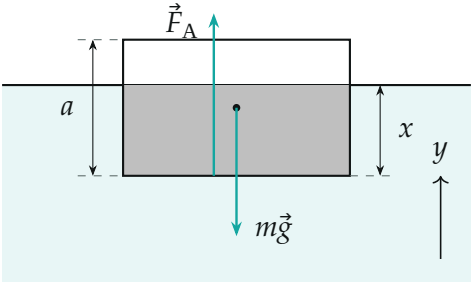
Два бруска плавают

Задача 2. [Росатом 2021/22, 8 класс, задача 2] Брусок в форме прямоугольного параллелепипеда плавает в воде. Когда на него поставили ещё один точно такой же брусок, над поверхностью воды оказался точно такой же объём, как и объём погружённой в воду части одного бруска (на рисунке эти объёмы закрашены). Найти плотность материала брусков, если плотность воды ρ_0.



▲ **Решение. Что происходит.** Плавающее тело в равновесии: сила тяжести уравновешена силой Архимеда, а сила Архимеда пропорциональна погружённому объёму. Класс задачи — условие плавания для двух состояний: один брусок и два бруска стопкой. Неизвестных два — плотность ρ и глубина погружения одного бруска, уравнений тоже два, и их отношение сразу даёт ответ. Качественно: второй брусок вдвое увеличил вес, значит, погружённый объём тоже должен удвоиться.

Обозначения. a — высота бруска, s — площадь его основания (брусок плавает основанием вниз, сечение по высоте одинаково), $V = sa$ — объём, $m = \rho V$ — масса одного бруска; x — глубина погружения одного бруска. Закрашенный на левом рисунке объём — sx.



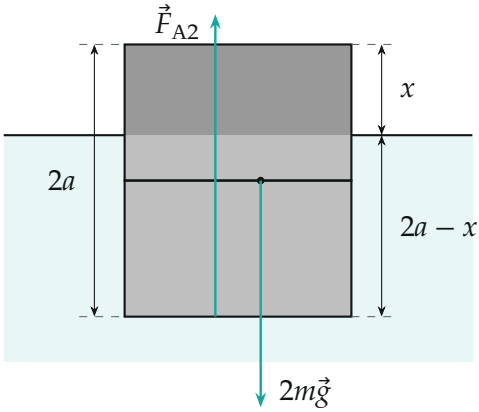
Один брусок: сила тяжести из центра масс вниз, сила Архимеда приложена к погружённой части

1. Один брусок. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{A}}$ со стороны воды (давление воды на нижнюю грань; на боковые грани силы давления взаимно уравновешены). Брусок покоится, поэтому второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось y, направленную вверх:

$$F_{\text{A}} - mg = 0, \qquad F_{\text{A}} = \rho_0 g\, sx \quad \Rightarrow \quad \rho\, sa\, g = \rho_0\, sx\, g.$$

Отсюда $x = \dfrac{\rho}{\rho_0}\, a$: доля погружённой высоты равна отношению плотностей.

2. Два бруска стопкой. Над водой теперь объём sx — столько же, сколько было погружено у одного бруска (условие). Высота стопки $2a$, значит, под водой высота $2a - x$. Систему «два бруска» рассматриваем как одно тело массы $2m$: сила, с которой верхний брусок давит на нижний, — внутренняя и в уравнение не входит.



Два бруска: над водой высота x (тёмная часть), под водой $2a - x$

Условие плавания стопки — второй закон Ньютона в проекции на ось y:

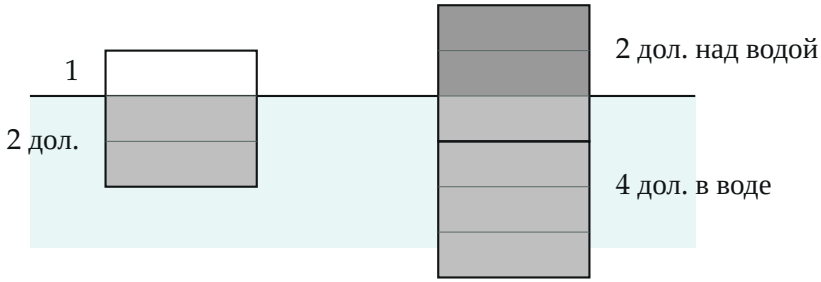
$$F_{\text{A2}} - 2mg = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\rho\, sa\, g = \rho_0\, s\,(2a - x)\, g.$$

3. Решаем систему. Поделим уравнение п. 2 на уравнение п. 1 — плотности, s и g сокращаются:

$$2 = \frac{2a - x}{x} \quad \Rightarrow \quad 3x = 2a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}a.$$

Подставим в п. 1:

$$\rho = \rho_0 \frac{x}{a} = \frac{2}{3}\rho_0.$$



Высота бруска разбита на три равные доли: один брусок погружён на 2 доли из 3, стопка из 6 долей — на 4 (вдвое больше), над водой 2 доли — как погружённая часть одного бруска

Обратите внимание: в условии над водой у стопки не «половина бруска» и не «часть верхнего бруска» вообще, а именно объём sx — тот же, что был погружён у одного бруска. Если путать эти объёмы, вместо двух уравнений получится одно.

Ответ. $x = \frac{2}{3}a, \quad \rho = \rho_0 \frac{x}{a} = \frac{2}{3}\rho_0.$

Проверка. Размерность: ρ выражена через ρ_0 безразмерным множителем. Второй способ — через удвоение веса: вес стопки вдвое больше, значит, и погружённый объём вдвое больше, $2x$. Но погружённая высота стопки равна $2a - x$, поэтому $2x = 2a - x$, $x = \frac{2}{3}a$ — то же самое. Ограничение: брусок легче воды ($\rho < \rho_0$), иначе бы он не плавал, — $\frac{2}{3} < 1$, выполнено; стопка тоже плавает, так как $2a - x = \frac{4}{3}a < 2a$.

Смысл: один брусок погружён на две трети высоты, стопка — на две трети своей высоты, поэтому над водой у стопки остаётся треть от $2a$, то есть те же $\frac{2}{3}a$.

Ответ. $\rho = \dfrac{2}{3}\rho_0$.