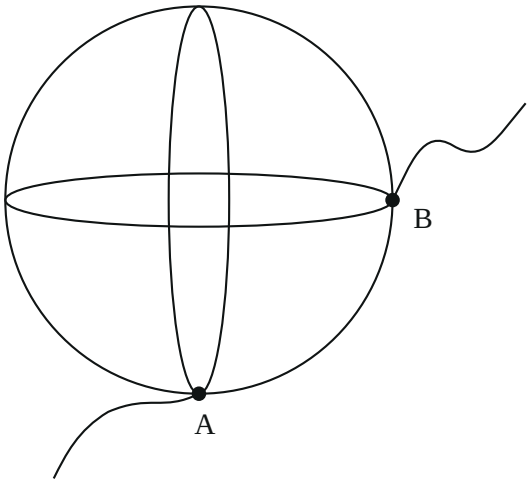
Три проволочных кольца

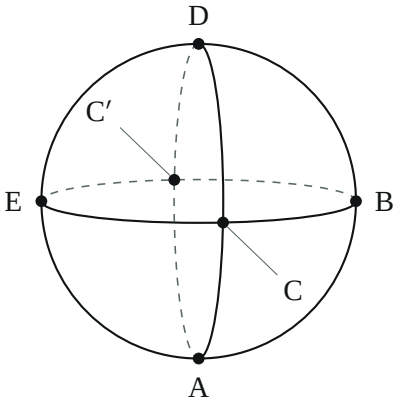
Задача 5. [Росатом 2021/22, 8 класс, задача 5] Спаяли три проволочных окружности одинакового радиуса, сделанных из одинакового провода, расположив их под прямыми углами друг к другу (см. рис.). Сопротивление провода, из которого сделана каждая окружность, равно R. Окружности включили в электрическую цепь за две соседних точки пересечения окружностей (точки A и B на рисунке). Найти сопротивление этой цепи. В точках пересечения проводов между ними есть электрические контакты.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Три взаимно перпендикулярные окружности пересекаются в шести точках — как вершины октаэдра: по две точки на каждой из трёх взаимно перпендикулярных осей. Каждая окружность разбита этими точками на четыре одинаковые дуги, всего 12 дуг-резисторов. Класс задачи — сопротивление симметричной цепи, которая не сводится к последовательным и параллельным соединениям. Ключ — симметрия: она сразу даёт потенциалы части узлов, а для остальных хватает одного уравнения закона сохранения заряда.

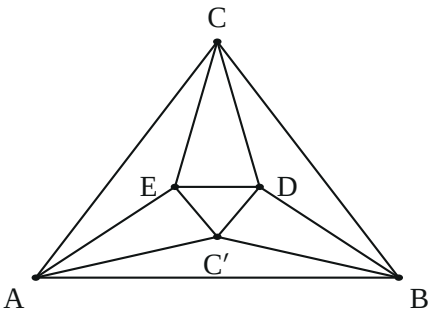
Обозначения. r — сопротивление одной дуги (четверть окружности), U — напряжение между A и B, I — ток в цепь. Узлы: A — нижняя точка,

B — правая, D — верхняя (противоположная A), E — левая (противоположная B), C — передняя и C′ — задняя точки пересечения горизонтальной и вертикальной окружностей.



Шесть точек пересечения: A и D, B и E — концы перпендикулярных диаметров в плоскости рисунка, C и C′ — спереди и сзади. Задние половины окружностей — пунктиром

1. Сопротивление дуги и схема. Окружность из однородного провода разбита на четыре равные четверти, сопротивление пропорционально длине, поэтому $r = R/4$. Каждая точка лежит на двух окружностях и соединена дугами с четырьмя соседями — со всеми, кроме противоположной. Нарисуем эту сеть на плоскости (длины линий на схеме значения не имеют, важно только, какие узлы соединены):



Сеть из 12 одинаковых резисторов $r = R/4$: каждый узел соединён с четырьмя, кроме противоположного (A–D, B–E, C–C′ не соединены)

2. Симметрия. Цепь переходит сама в себя при зеркальном отражении в плоскости, проходящей через C и C′ посередине между A и B (она меняет местами A↔B и D↔E). При таком отражении ток меняет направление на обратное: из A в B → из B в A. Отсюда «антисимметрия» потенциалов: если $\varphi_B = 0$, $\varphi_A = U$, то для узлов-пар

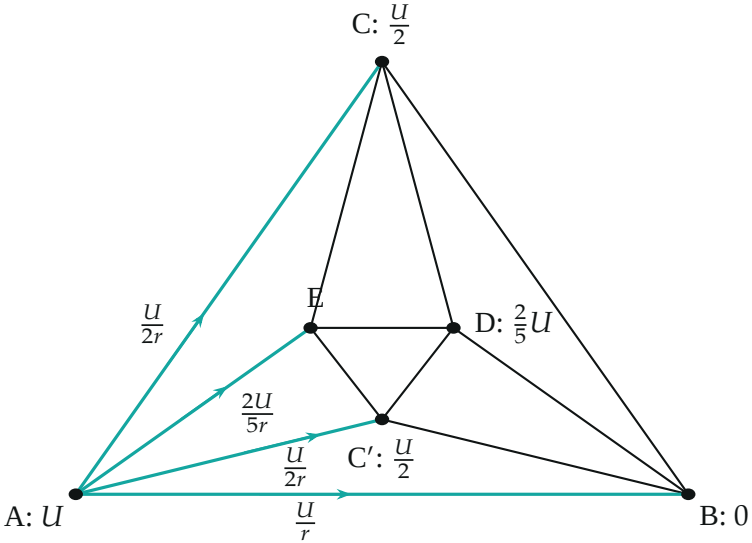
$$\varphi_C = \varphi_{C'} = \frac{U}{2}, \qquad \varphi_D + \varphi_E = U.$$

Узлы C и C′ лежат на плоскости симметрии, поэтому их потенциал — ровно среднее. Обозначим $\varphi_D = a$, тогда $\varphi_E = U - a$.

3. Потенциал узла D. Закон сохранения заряда для узла D (ток в узел равен току из узла; заряд в нём не накапливается) с законом Ома для каждой дуги: сумма токов, втекающих в D от соседей B, E, C, C′, равна нулю:

$$\frac{0-a}{r} + \frac{(U-a)-a}{r} + 2\cdot\frac{U/2-a}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2U - 5a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{5}U.$$

Тогда $\varphi_E = \frac{3}{5}U$. С узлом A узел D не соединён, поэтому в уравнение не входит.



Потенциалы узлов ($\varphi_E = \frac{3}{5}U$) и токи в четырёх дугах, выходящих из A (бирюзовые); сумма этих токов — ток I во внешней цепи

4. Ток и сопротивление. Весь ток I, вошедший в A, растекается по четырём дугам A–B, A–C, A–C′, A–E. По закону Ома для каждой:

$$I = \frac{U-0}{r} + 2\cdot\frac{U-U/2}{r} + \frac{U-\frac{3}{5}U}{r} = \frac{U}{r}\left(1+1+\frac{2}{5}\right) = \frac{12}{5}\,\frac{U}{r}.$$

Сопротивление цепи

$$R_{\text{об}} = \frac{U}{I} = \frac{5}{12}r = \frac{5}{12}\cdot\frac{R}{4} = \frac{5}{48}R.$$

Обратите внимание: точки D и E — не «равнопотенциальные» с C, как может показаться из-за симметрии фигуры. Плоскость симметрии проходит через C и C′, а D и E лишь меняются местами при отражении, поэтому у них свой потенциал, и его приходится найти из уравнения для узла.

Ответ. $r = \frac{R}{4}$, $\varphi_{\text{C}} = \frac{U}{2}$, $\varphi_{\text{D}} = \frac{2}{5}U$, $R_{\text{об}} = \frac{5}{12}r = \frac{5}{48}R$.

Проверка. Размерность — омы. Проверка закона сохранения заряда

в узле B: втекает $\frac{U}{r}$ (из A) $+2\cdot\frac{U}{2r}$ (из C, C′) $+\frac{2U}{5r}$ (из D) $=\frac{12}{5}\frac{U}{r}=I$ — столько же, сколько вытекает в A. Второй способ — теорема Фостера: для цепи, в которой все рёбра равноправны, сопротивление между соседними узлами равно $r\,(N-1)/M$, где $N=6$ узлов, $M=12$ рёбер: $r\cdot\frac{5}{12}$ — то же. Численное решение системы узловых потенциалов на компьютере даёт $0{,}10417\,R=\frac{5}{48}R$.

Смысл: если бы ток шёл только по прямой дуге A–B, было бы $r=\frac{12}{48}R$; три других пути (через C, C′ и через E–D) уменьшают сопротивление в 2,4 раза.

Ответ. $R_{\text{об}}=\dfrac{5}{48}R$.